分権的生産システムに関する研究(Dissertation_全文)

AUTHOR(S):

奥田, 和重

②

分権的生産システムに関する研究

1993

おく　だ　かず　しげ
奥田和重

目 次

第1章　序　論

1.1　分権化の意義

システムあるいは組織の構造を集権化するか分権化するか，という問題に対する認識は古くから存在し，その議論も行なわれてきた[72]．語意的には，分権化の英用語"decentralized"は，集権化の英用語"centralized"に否定を意味する接頭語"de"が結びついたもので,「集中の排除」を意味するとされている．この意味において集権化と分権化は一見相互排除的であり，二者択一的であるかのようで，対立概念として捉えられることが多い[1]．

集権化と分権化をこのような対立概念で捉えるのではなく，相対概念で捉えなければならないことは次のことから明らかである．システムがなんらかの"決定"を行うとき，その決定と決定を行うための入力および決定の結果である出力が，システム要素の一箇所に集中しているとき，そのシステムは集権的であり，そのようなシステムを集権的システム (centralized system) と呼ぶことにする．他方，システムを構成するすべての要素に入力と出力が分散しており，決定もまたすべての要素で行なわれるとき，そのシステムを完全分権的であると呼び，そのようなシステムを完全分権的システム (complete decentralized system) と呼ぶことにする．この完全分権的システムは，要素間に協調関係を保つ必要があり，そうでなければシステムが分裂する危険がある．通常，分権的システム (decentralized system) と呼ばれているシステムは，この集権的システムと完全分権的システムの間に存在しており，分権的システムは集権的システムにより近

[1]たとえば，T.Marschak[64, 65] は集権的経済と分権的経済の優劣を論じている．

い場合もあれば完全分権的システムにより近い場合もある．これは分権的システムが集権的システムを完全に代替するものではなく，集権的システムをどの程度まで代替するのか，言い換えればどの程度まで分権化するのかという程度の問題となる．

このように分権化の問題は集権化との調和の問題として考える必要があり，最適な分権化の程度は何かという最適分権化の問題として，これはまた分権化と集権化の均衡の問題として考えなければならない．この最適分権化に関して高田 [5] は経営成果を最大にする分権化の程度を最適分権としている．また分権とほぼ同意義的に用いられている" 分散 (distribution)" に関して深尾 [13] は熱力学的システム論の立場から熱力学的平衡が達成されるとき最適分散が決定されるとしており，廣瀬 [20] は情報の処理と通信に関するシステムコストを導入し，これを最小にする情報処理量をもって最適分散の指標としている．これらの研究は最適分権（あるいは最適分散）を得るための試みではあるが，分権度 (decentralizability) というような分権化の程度を表す一般的な定量的指標が示されていない．

分権的システムに関する研究では，この最適分権化の必要性は十分認識されてはいるが，分権度に関する一般的な指標がないためにこれに触れているものは少ない．多くの研究では，対象を分権的システムとしてどのように認識するかによって分権化の程度が定まり，それを暗黙の前提条件としている．この認識は，機能に基づく場合と空間的位置関係に基づく場合，およびシステムが数理計画法のモデルとして定式化されるときのモデルの構造に基づく場合がある．いずれの場合であっても，システムが一度分権的システムであると認識されると分権化の程度は定まり，それが最適であるかどうかの議論はされない．適切な分権度に関する研究は，分権的システムを考察する上で重要な研究課題である．

システムを分権化する根拠の一つにシステムの規模の問題がある．これはシステムが大規模になれば集権的構造ではシステムを管理することが困難になるため，これを小規模なシステムに分割して管理するほうがよい，ということである．この分割はシステムを機能あるいは空間的位置関係に基づいて認識するとき可能となる．企業が事業部を製品別や地域別に設置しているのはこの例である．もう一つの根拠に分権化は参加意識の動機付けや生き甲斐を与え，システムを活性化させることがある．これは上記のいずれの認識にも当てはまらないし，どのように分権化すればよいかという問に答えることもない．しかしながら，定量化が困難なこの根拠は先の規模の問題よりも重要であるかもしれない．

1.2 分権的生産システムの定義

前節では「集権化と分権化」について考察を行ない，分権化の程度に関する暗黙の前提条件の存在を指摘した．本節でもこの暗黙の前提条件の存在を認め，この条件のもとで生産システムの分権化について考察し，本研究の主題である分権的生産システムの定義を与える．

人見 [14] に従って生産システムを入出力システムとしてとらえると，入力は生産要素で出力は生産財であり，変換過程は一般的には多段階の生産工程である．さらに入力である生産要素と出力である生産財を観測し，これにもとづいて生産目標を達成するように生産工程を制御するとき，システムは図 1.1に示すような生産の意思決定システムとなる．企業を生産の意思決定システムとしてとらえると，その組織はピラミッド型の階層構造で表わされる．企業の経営規模が拡大して経営活動が複雑化・多様化すると，前節で述べた分権化の根拠の一つである規模の問題に関連して分割され，下位レベルの意思決定単位を構成する．この意思決定単位が

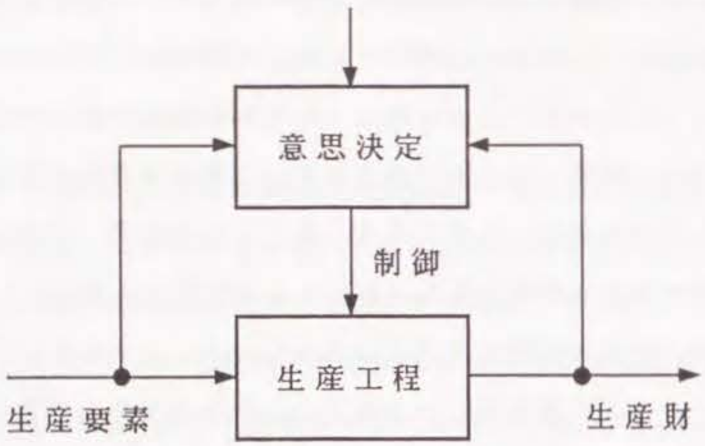


図 1.1 生産の意思決定システム

さらに分割されて下位レベルの意思決定単位を構成する．このように生産の意思決定システムを分割していくと階層が下方に構成される．意思決定単位がそれ以上分割されない，あるいは分割する必要がない単位まで分割された時，そのような意思決定単位は階層の最小要素となる．階層の最上位レベルの意思決定単位は，それを含む上位の意思決定単位が存在しないので最大システム[2]となる．この最大システムから最小要素にいたるまでの階層はシステム階層のスパン (span) と呼ばれている [16]．このような意思決定システムの分割は，従来，小数のトップマネジメントが保有していた「意思決定の権限[3]」の分割・分散化にともなって行なわれる．分割され分散化された意思決定権限は，下位レベルの意思決定単位に委譲され，それにともなって意思決定に関する責任も付与される．

[2]最大システムとは，それを部分とするより大きなシステムが存在しないシステムである [16]．

[3]この権限は，組織において自己の職務を公にする権利ないし力のことをいう [4]．

このような意思決定権限の委譲にともなう分権化は，企業組織のラインに沿った権限の委譲であり，企業の基幹的執行活動[4]に関する包括的決定の権限[5]の委譲である．意思決定権限の委譲に基づく分権化の構造は，調達⇒製造⇒販売という執行活動の過程に沿って分権化する「職能的分権制 (functional decentralization)」と，執行活動の統一性を保った状態で分権化する「連邦的分権制 (federal decentralization)」に大別することができる．前者では，意思決定単位は職能に関する部分的な決定権限を持つのに対して，後者は包括的な決定権限を持ち，独立した企業であるかのように活動するので，前者よりは後者のほうがより望ましい分権化であるといえる．

生産システムの分権化をマクロな視点から捉えた場合，分権的な生産システムの典型的な例として事業部制組織 (divisionalized organization) がある．上記の職能的分権制に基づいて組織化された事業部制組織が職能的事業部制組織であり，連邦的分権制に基づく事業部制組織が連邦的事業部制組織で，製品別，顧客別あるいは地域別に事業部を組織化するものである．この連邦的事業部制組織の各事業部は，事業部の基幹的執行活動に関する責任を持てるだけの包括的な決定権限が附与された自律的意思決定単位 (autonomous decision unit)[4] である．しかしながらすべての決定権限が事業部に附与されているのではなく，事業部を統括する部門（これを本部と呼ぶことにする）に留保される決定権限が存在する．この留保された権限は，企業の全般的な経営管理の権限で，全体的な方針および計画の設定を行ない，さらに各事業部の設定する方針や計画を調整するものである．この本部の権限によって定められた方針や計画の枠内で各事業部の意思決定が行なわれる．これには次の二つの方法がある．

[4]調達，製造，販売に関する基本的な経営活動をいう．

[5]人事，組織，経理に関する権限を包括する．

(1) 本部があらかじめ設定した方針や計画を中心として，事業部の計画を規定する．

(2) 事業部が持つ決定権限にもとづいて計画を立案し，これを統合して全体的な計画を定める．

事業部の自律性を尊重する，すなわち分権化をより進めるという観点に立脚するのであれば後者の立場をとるべきである．各事業部は本部が設定する全体的な方針や計画にもとづいた計画を立案するのであるが，後者の立場では，本部は各事業部の計画を考慮して方針や計画をたて，その一環として各事業部を調整する．すなわち，各事業部は事業部独自の目標にもとづいて計画を立案し，これを本部に報告する．本部は各事業部の計画を考慮して，企業の長期的方針のもとに全体的計画をたて，これに基づいて各事業部を統制する．

生産システムをミクロな視点でとらえた場合，生産工程の分権的管理が分権的な生産システムの例である．生産システムは一般的に多段階の生産工程からなる多段階生産システムである．この多段階生産システムの分権的管理は，各生産工程がその工程の生産に関する計画と管理に関する決定権限を持つことによって可能となる．これによって各生産工程は他の生産工程の決定とは独立して自らの工程の計画と管理を行うことができる．しかしながら，多段階生産システムの場合では，ある生産工程の産出物が他の生産工程の投入物になり，他の生産工程が行なった決定の影響を直接的にあるいは間接的に受ける．この影響は他の生産工程が決定を行なった後であれば直接知ることができるが，多くの場合決定は複数の工程で同時に並行して行なわれる．したがって，各生産工程は他の生産工程の行う決定を推測して自らの決定を行うことになる．しかし互いに推測を行うことになるので，推測の繰り返しとなり，最終的な決

定を得ることはできない．この推測の繰り返しを避けるためには，決定するための情報を工程間で互いに交換することによって他の生産工程の影響を考慮すればよい．生産工程間の情報の交換が完全に行なわれると，全ての工程は同じ情報を持つことになり，たとえ計画と管理に関する決定権限を持っているにしても本質的には集権的構造と同じである．したがって多段階生産システムの分権的管理では，情報交換ができないあるいはしないといった制約がある場合に意味を持ち，その情報交換の型である情報構造を決定することが問題となる．このような問題は分散制御システムとして研究されており [51, 35, 36, 17]，チームの理論 [62, 54] が適用されている．チームの理論で対象としているシステムは意思決定単位の間に共通する目標が唯一存在するシステムである．したがってチームの理論による分散システムは，意思決定単位が有目的的ではなく必ずしも自律的であるとはいえない．分権的管理の対象となる多段階生産システムは，各生産工程が独自の目標を持ち，他の生産工程と情報交換を行なって目標の最適化を行うものである．

上述で生産システムの分権化をマクロな視点とミクロな視点から検討したが，いずれの場合でも分権化は意思決定の権限の移譲とそれにともなう責任の附与によって実現されるものである．したがって，意思決定権限の分割と分散に基づいて生産システムを分権化することによって分権的な生産システムを組織化することができる．意思決定権限の分割と分散は，前節で述べたように生産システムのシステム要素である事業部や生産工程の機能あるいは空間的位置関係に基づいて行なわれるもので，生産システムを数理計画法のモデルとして定式化したときに得られるモデルの構造によって分権化されるものではない．本研究では，このように意思決定権限の分割と分散によって分権的に組織化された生産システムを「分権

的生産システム (decentralized production(manufacturing) system)」と定義する．この分権的生産システムの構造を次のように定める．マクロな視点による検討に基づいた分権的生産システムのマクロ・モデルは一つの本部と複数の事業部によって構成されるものとし，ミクロな視点によるミクロ・モデルは工場を構成する複数の生産工程とそれらを統括する管理部門によって構成されるものとする．さらに事業部と工場を 1 対 1 に対応づけることによって，マクロ・モデルとミクロ・モデルを融合させる．これにより，本研究で対象とする分権的生産システムの構造は，本部を最大システム，生産工程を最小要素とする 3 階層の組織構造となる．これを図で表すと，図 1.2のようになる．本研究では，この図に示している 3 階層の分権的生産システムを対象とし，その生産計画問題の最適化解析を通じて分権化と統合の問題を明らかにすることを目的とする．

1.3 分権的システムの展開

今日，分権的システムとして論じられている研究の源は (1) 経済学，(2) 経営学，(3) システム理論と数理計画法の各分野にある．経済学の分野における分権的システムは，社会主義体制下における経済計画に対する分権的解法 [10]，あるいは分権的経済計画 [2] の議論に始まる．これは Walras による価格を取り入れた模索過程 (tâtonnement process) が，市場が存在しない社会主義体制下の経済計画に応用できないか，という議論である．1929 年に F.M.Taylor が提案した社会主義国家での生産計画プロセス [78] は，本源財[6]の価格を設定する「中央計画当局」を設置し，設定された本源財の価格のもとで最終財の価格をフル・コスト原理で決定するものである．

[6]本源財とは組織の活動によって生産されることがなく組織の外部からのみ流入する財のことをいい，最終財は本源財によって直接生産される財のことをいう．これらの用語は，青木 [10] による．

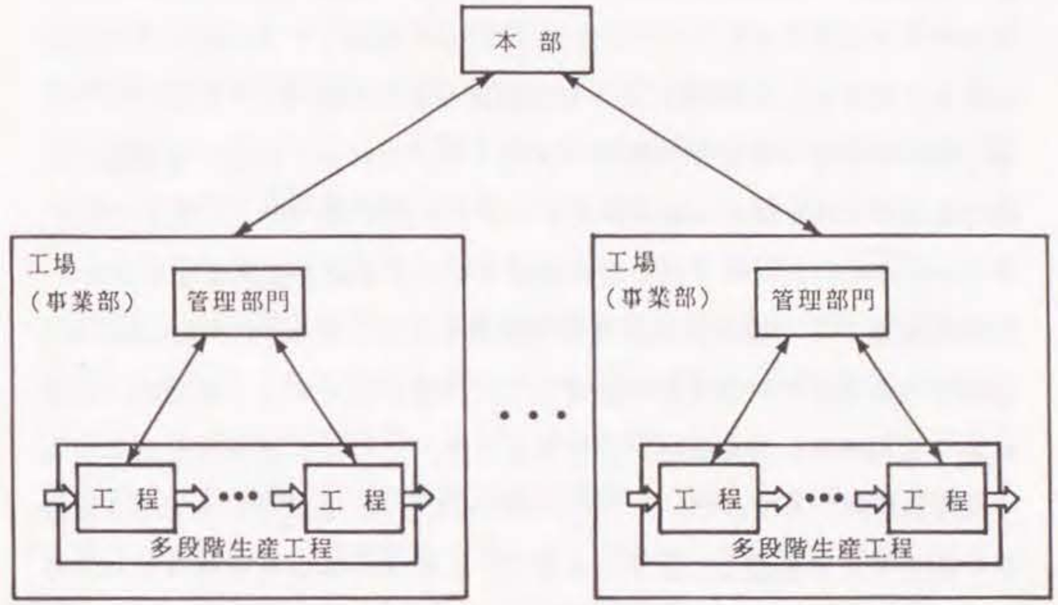


図 1.2 分権的生産システム

この方法は，需要と供給を均衡させるために本源財の「価格」を用いて調整を行うところに，その特色がある．この方法は，後に Malinvaud[61] によって厳密に定式化されている．Lange[58] は Walras の模索過程を経済計画に取り入れ，経済計画の最適解をみいだす計算方法に市場における需要と供給の均衡をもたらす価格による調整過程を模倣することを提案した．Arrow と Hurwicz[24] はこの Lange の研究の持つ分権的解法の性質や，解の存在，安定性について理論的精緻さを加えた方法を考察している．Kornai[57] は，需要と供給の調整に価格を用いることができない場合について，中央計画当局が資源を有効配分することによって調整を

行う方法を提案している．

経営学での分権的システムは，企業における分権的管理体制である事業部制組織の研究とともに発展してきた．事業部制組織の採用は，デュポン社やジェネラルモーターズ社が 1920 年に採用したのが最初であるといわれ，日本では 1933 年に松下電気産業が初めて採用している [11]．以後，多くの企業で事業部制組織が採用され，それにともない組織論の分野で分権的管理に関する研究がなされてきた [80, 44, 86]．これとは別に，Schmalenbach は 1940 年代に集権的管理である官僚主義的管理を否定し，分権的管理である価格的経営管理の採用を主張した [5]．Schmalenbach は企業内の各部門に競争原理を導入し，限界原価をもって各部門の振替価格（管理価格，移転価格）とするもので，この限界原価を最適妥当数字（有効数値）と呼んでいる．彼のこの考え方は，経済学における Lange らの価格による調整と一致するもので，この頃から振替価格はすなわち双対変数であり，また Lagrange 乗数であるという図式が定着してきた．分権的管理における振替価格に関する研究は，Cook[37] や Hirshleifer[49] から近年の門田 [18, 19] に至るまで展開されてきたが，基本的な考え方はほとんど変わっていない．

システム理論と数理計画法の分野における分権的システムは，大規模な線形計画問題を小規模な線形計画問題に分割して解く分割原理が Dantzig[39] らによって開発されたことに始まる．これは Baumol らが指摘しているように，分割原理の解手順と先述の経営学における分権的管理の調整過程に類似性が認められるからである [28, 12, 3]．非線形計画問題を対象とした前述の Arrow らの研究とともに，その適用範囲を一般的な大規模システムに広げるに至り，分割原理に基づく分権的システムの議論がされるようになった．Dantzig らの分割原理は，適用が容易であるかのように

見えるために多くの研究がなされ，制約条件の構造が対角構造だけでなく，双対角構造などの特殊な構造を持つ問題に対する解法や Benders の分割法 [59, 48] などが開発された．しかしながら，収束が遅く期待したほどの成果が得られないことや，近年のコンピュータの発展により大規模な数理計画問題を分割して解く必要がないなどの理由により久しく見捨てられる形になった．これに関して，Ho らは Dantzig-Wolfe の分割原理を用いて線形計画問題を解くプログラミング・コード DECOMP を開発し，このような定説が必ずしも正しくないことを示している [50]．分権的管理に分割原理を適用した最近の研究には，Meijboom[66] や笹井と井上 [6] にみられ，また Van de Panne[84, 83] は Dantzig-Wolfe の分割原理ではすべての部分問題が同一レベルで取り扱われているとして，部分問題を独立的な部分問題と従属的な部分問題に分け，従属的な部分問題を上位レベルである主問題に取り入れることによって完全な分権化を達成しょうとしている．

分割原理に関する研究には，Benders の分割原理を適用したものに [27, 69, 21] があり，Karmarkar の内点法を用いた [81]，Dantzig-Wolfe の分割原理と Benders の分割原理を用いた cross decomposition[85]，緩和法による [82]，階層分割解法を提案している [1]，非凸関数を取り扱った [77, 79] などが報告されている．これまでに述べた分割原理では，決定変数は必ずいずれかの部分問題に属しており，複数の部分問題が共通の決定変数を持つことはない．Šiljak[88] は，いくつかの部分問題に共通の変数を含む場合の分割法を考察しており，これを overlapping decomposition と呼んでいる．

分割原理に基づく分権的システムに関する研究は，1960 年代に一般システム理論から発展してきた階層システム理論 (hierarchical system theory)[67, 68] と融合し，大規模階層システム理論 [59, 90] として研究されるようになり，この理論展開は [74, 41, 73, 47, 53, 38, 60, 76] に見られるように発展してきた．現実世界に対してもメキシコ・シティの空港開発計画 [43] や水資源利用計画 [46] などに応用され，多くの成果を収めた．

このような分割原理の理論的展開にともない，多くの分権的システムに関する研究が報告されてきた．事業部制組織で，事業部間の相互関係の強さを考慮した [34]，primal-dual 法を適用してサブシステム間で交換される情報量を最小にすることを目的とした [87]，事業部制組織の予算計画に分割原理を適用した [32]，いくつかの分割法や統合法を比較検討した [25, 29, 30] などが報告されている．Abad[22] はマーケッティングー生産システムに対して価格による統合法 (goal-coordination) を適用しており，Eto[40] は多目標を持つ部分システムで構成される 2 階層分権的システムに対して Benders の分割原理を適用している．

これらの研究はいずれも，モデルの持つ数学的構造に基づいて分割されいるが，分割の仕方には，システムが持つ組織的構造や，地理的位置関係による場合がある．計算効率の観点にたてば，数学的構造に基づく分割の方が有効である場合が多いが，組織構造に基づく分割は，計算効率のための分割というよりは，組織における意思決定過程の記述に重点がある．この方法は部分問題を記述し，それを合成することによって全体問題を認識することができるので，合成法 (composition) と呼ばれており [75]，Ruefli らや志水らの一連の研究 [71, 70, 42, 89, 7, 8] が報告されているが，その数は少ない．

分権的システムとして論じられているものの 1 つに分散制御がある．これはシステム全体を調整する上位レベルが存在せず，サブシステム間の情報交換によってシステム全体の安定化を行う問題である．この問題でサブ

システム間に共通の目標が存在するとき，問題はチームの決定問題となり，これを取り扱う理論としてチームの理論がある．チームの理論は Marschak によって始められ [62]，Radner によって発展させられた [63]．後に，Ho と Chu によって動的な問題に拡張された [51]．一方，Witsenhausen は制御問題では情報構造を明確にすることが重要であることを指摘した [91]．これを契機に分散制御システムの研究が盛んになったが，分散制御システムはチーム決定問題と類似の構造を持つことから，チームの理論が制御の分野に取り入れられるようになった [73]．

上記以外で分権的システムを取り扱った研究には，外部性が存在する環境のもとでの情報分権化を論じている [31]，機能と地理関係を考慮した分権化を取り扱っている [55]，上位レベルと下位レベル，あるいは下位レベル間での情報交換に時間遅れがあることに着目した [56]，分権化の動機 (incentive) を取り扱った [45, 23]，組織構造が計画に与える影響を論じている [26]，非協力ゲームの理論を適用した [33, 52] などがある．

1.4 本研究の概要

本研究では，本部と工場によるマクロ・モデルの統合問題に対し,「資源配分による統合」を提案する．この統合は，本部が原材料，労働量，生産設備，資金などの生産資源を各工場に配分して全体を統合しようとするもので，各工場は配分された資源を用いて生産を計画し実施する．具体的な統合方策としては，本部が資源の配分計画を立案し，各工場はその枠内で生産計画を作成する top-down 方式と，各工場が実施可能な生産計画とそれを実施するのに必要な資源を生産計画案として本部に報告し，本部は各工場の生産計画案に基づいて資源の配分を計画する bottom-up 方式が考えられる．本研究では，1.1 節で述べたように分権化の意味から

して工場の自律性をより強く認めた後者の方式を採用する．この方式を実現するために本研究では，工場における生産計画の最適化問題にマルチパラメトリック線形計画法を適用し，実施可能な生産計画とそれを実施するのに必要な資源の量を得る方法を提案する．さらに，本部が全体的最適化の立場から工場ごとに得られる生産計画案の最適な組合せを求め，資源の配分量を決定する方法を提案する．

管理部門と工程によるミクロ・モデルに対しては，管理部門と生産工程間の統合問題を取り扱う「生産目標設定方式による統合」を提案する．マクロ・モデルによって工場が作成した生産計画を実施するのに必要な資源は保証されているので，ミクロ・モデルではそれらの資源を用いて多段階生産工程の生産計画を作成する．各工程には工場が作成した生産計画に基づいて生産目標が定められ，これを達成するように各工程は自らの工程の生産計画を作成する．多段階生産工程の場合，工程間に相互関係が存在するので，各工程は他の工程と完全に独立して生産計画を作成すると，過剰在庫や品切れが生じる可能性がある．これを防ぐために工程間の相互関係を満たすように各工程の生産を均衡させる必要がある．各工程の生産を均衡させるために本研究では，各工程が互いに必要な情報を交換し，それに基づいて生産目標の達成と工程間の均衡を実現する生産計画を作成する方法を提案する．この方法に対しては非協力ゲームの一分野である Nash 均衡解 (Nash equilibrium solution) の概念を適用し，これを用いて生産計画を最適化（均衡化）できることを示す．

管理部門による工程の統合方式は，マクロ・モデルの場合と同様に bottom-up 方式であるとする．これは，各工程が生産計画の最適化（均衡化）を行うことによって均衡条件を得ることができるので，これを管理部門に報告する．管理部門は各工程から報告された均衡条件を制約条件に組み

入れて工場全体の生産計画問題を作成し，最適化を行う．これによって得られた最適な生産計画に基づいて，各工程の生産目標を決定する．このようにミクロ・モデルでは，工程間の均衡問題並びに管理部門と工程間の統合問題が存在する．本研究で提案する「生産目標設定方式による統合」はこれらの問題を同時に取り扱うことのできる統合法である．

本研究では，分権的生産システムのマクロ・モデルとミクロ・モデルに対してそれぞれ「資源配分による統合」と「生産目標設定方式による統合」を適用することによって，3 階層分権的生産システムの全体的な最適化を行う方法論を展開する．本論文の構成と概要は以下のようである．

つづく第 2 章では，従来から研究されてきた分権的システムに対するアプローチを概括し，本研究で取り扱う分権的生産システムに対するアプローチとしての妥当性を検討する．分権的システムに対する従来のアプローチは，主に分割原理に基づいた最適化手法であり,「価格設定による統合」,「資源配分による統合」,「価格設定と資源配分による統合」,「目標設定方式による統合」の 4 つのタイプのアプローチがある [15, 9, 74]．2.2 節でこれらの統合法に関してその方法論を検討し，組織的に分権化された分権的システムに適用することに問題点が存在することを指摘する．2.3 節では，分割原理に基づかない分権的システムに対するアプローチとして Ruefli の目標計画法に基づいた GGD モデル [71, 70] を概括し，分権的システムに対するアプローチとしての妥当性を検討する．2.4 節では分割原理に基づかない方法として，本研究で提案するマルチパラメトリック線形計画法を適用した「資源配分による統合」と非協力ゲームの理論に基づいた「生産目標設定方式による統合」の概要を示し，その妥当性を検討する．そして本研究で取り扱う 3 階層の分権的生産システムの全体的な枠組みを明らかにする．

第3章では提案する資源配分による統合に基づく分権的生産システムのマクロ・モデルの最適化解析を行う．3.2節では工場間の相互関係がシステム干渉である場合の資源配分問題を取り上げ，その統合法を概括して妥当性を検討する．3.3節では，提案する資源配分による統合の概念と，従来の方法との相違点を明らかにし，マクロ・モデルの生産計画問題を線形モデルである場合について定式化を行ない，マルチパラメトリック線形計画法と劣勾配を用いた最適化法を提案する．3.4節ではマクロ・モデルを非線形計画モデルへの拡張を試みるための足がかりとして，生産計画問題が2次計画問題として定式化できる場合について，マルチパラメトリック2次計画法を適用した最適化法を検討し，3.3節で得た結果を2次モデルの場合に拡張する．3.5節では，工場間に技術的な相互依存関係が存在する場合に拡張したモデルについて検討する．

第4章は分権的生産システムのミクロ・モデルに対して非協力ゲームの理論に基づいた生産目標設定方式による統合を適用し，ミクロ・モデルの最適化解析を行う．4.2節では提案する生産目標設定方式による統合の概念を示し，分権的生産システムのミクロ・モデルを生産計画問題として定式化する．さらに，工程間の相互関係を調整するために非協力ゲームの理論を適用し，これにNash均衡解の概念が適用できることを示す．4.3節と4.4節では多段階生産工程の単一期間と多期間の生産計画問題をそれぞれ対象とし，工程間の相互関係を満たす均衡解を得るための最適化解析を行う．4.5節では生産目標設定方式による統合問題にStackelberg-Nash均衡解 (Stackelberg-Nash equilibrium solution) の概念を適用した最適化解析を行う．

第5章では第2章から第4章までの展開を総括し，本研究で明らかになった事柄を整理する．

参考文献

[1] 王晶，中村信人：多段階総合生産計画問題に関する研究（新しい分割解法の提案と他の分割解法との比較）．日本機械学会論文集（C編） Vol.56, No.524, pp.1065–1069，1990．

[2] 宮本勝浩：分権的経済計画と社会主義経済の理論．大阪府立大学経済学部，1976．

[3] 古瀬大六：分権的管理の基礎理論．日本経営出版会，1969．

[4] 高宮晋：経営組織論．ダイヤモンド社，第33版，1978．

[5] 高田馨：経営の職能的構造．千倉書房，1977．

[6] 笹井均，井上正：組織と情報の経営学．中央経済社，1989．

[7] 志水清孝，安西祐一郎：地方自治権をもつ階級制システムの最適化．計測自動制御学会論文集 Vol.10, No.1, pp.63–70，1974．

[8] 志水清孝，相吉英太郎：資源配分形階層システムの数理計画法的若干の性質．計測自動制御学会論文集 Vol.14, No.6, pp.745–746，1978．

[9] 志水清孝：システム最適化理論．コロナ社，1976．

[10] 青木昌彦：組織と計画の経済理論．岩波書店，1976．

[11] 占部都美：事業部制と利益管理．白桃書房，第7版，1976．

[12] 浅沼萬里：分割原理と分権管理．経済論叢 Vol.99, No.3, pp.281–301，1967．

[13] 深尾毅：分散システム論：熱力学的システム論．昭晃堂，1987．

[14] 人見勝人：生産システム工学．共立出版，第2版，1990．

[15] 中野文平：分権化組織における調整方式に関する研究．博士論文，東京工業大学，1972．

[16] 日本機械学会編：機械工学便覧　基礎編　A7システム理論．日本機械学会，1986．

[17] 荻野剛二郎：大規模直列システムに対する分散制御．電子情報通信学会論文誌 *A* Vol.J73-A, No.5, pp.1022–1025，1990．

[18] 門田安弘：振替価格と利益配分の基礎．同文舘，1989．

[19] 門田安弘：振替価格と利益配分の展開．同文舘，1991．

[20] 廣瀬通孝：分散形システムの最適構造に関する研究．日本機械学会論文集（C）編 Vol.51, No.464, pp.883–892，1985．

[21] K. Aardal and T. Larsson : A Benders decomposition based heuristic for the hierarchical production planning problem. *European J. of Operational Research* Vol.45, No.1, pp.4–14, 1990.

[22] P.L. Abada : Approach to decentralized marketing-production planning. *International J. of Systems Science* Vol.13, No.3, pp.227–235, 1982.

[23] G. Anandalingam, K. Chatterjee, and J.S. Gangolly : Information, incentives and decentralized decision-making in a Bayesian framework. *J. of Operations Research Society* Vol.38, No.6, pp.499–508, 1987.

[24] K.J. Arrow and L. Hurwicz : Decentralization and computation in resource allocation. In R.W. Pfouts, editor, *Essays in Economics and Econometrics*, Univ. of North Carolina Press, 1960.

[25] D. Atkins : Managerial decentralization and decomposition in mathematical programming. *Operational Research Quarterly* Vol.25, No.4, pp.615–624, 1974.

[26] S. Axsäter : Decentralized production planning and choice of organizational structure. *International J. of Production Research* Vol.20, No.1, pp.12–26, 1982.

[27] H.C. Bahl and S. Zionts : Multi-item scheduling by Benders' decomposition. *J. of Operations Research Society* Vol.38, No.12, pp.1141–1148, 1987.

[28] W.J. Baumol and T. Fabian : Decomposition, pricing for decentralization and external economies. *Management Science* Vol.11, No.1, pp.1–32, 1964.

[29] R.M. Burton and B. Obel : A comparative analysis of price, quantity, and mixed approaches for decentaralized planning. *Economics of Planning* Vol.14, No.3, pp.129–140, 1978.

[30] R.M. Burton and B. Obel : The efficiency of the price, budget, and mixed approaches under varying a priori information levels for

decentralized planning. *Management Science* Vol.26, No.4, pp.401–417, 1980.

[31] A. Camacho : Externalities, optimality and informationally decentralized resource allocation processes. *International Economic Review* Vol.11, No.2, pp.318–327, 1970.

[32] W.T. Carleton, G. Kendaill, and S. Tandon : Application of the decomposition princple to the capital budgeting problem in a decentralized firm. *The J. of Finance* Vol.29, No.3, pp.815–827, 1974.

[33] P. Champsaur and G. Laroque : Strategic behavior in decentralized planning procedures. *Econometorica* Vol.50, No.2, pp.325–344, 1982.

[34] A. Charnes, R.W. Clower, and K.O. Kortanek : Effective control through coherent decentralization with preemptive goals. *Econometrica* Vol.35, No.2, pp.294–320, 1967.

[35] K.C. Chu : Team decision theory and information structures in optimal control problems – part II. *IEEE Transaction on Automatic Control* Vol.AC-17, No.1, pp.22–28, 1972.

[36] J.D. Cole and A.P. Sage : Multi–person decision analysis in large-scale hierarchical systems – team decision theory. *International J. of Control* Vol.22, No.1, pp.1–28, 1975.

[37] P.W. Cook : Decentralization and the transfer-price problem. *J. of Business* Vol.28, No.2, pp.87–94, 1955.

[38] J.B. Cruz Jr., editor : *Advances in Large Scale Systems.* Jai Pr., 1984.

[39] G.B. Dantzig and P. Wolfe : Decomposition principle for linear programs. *Operations Research* Vol.8, No.1, pp.101–111, 1960.

[40] H. Eto : Decentralization model with flexible multi-goal and concessions. *International J. of Systems Science* Vol.16, No.1, pp.49–60, 1985.

[41] W. Findeisen, F.N. Bailey, M. Brdyś, K. Malinowski, and A. Woźniak : *Control and Coordination in Hierarchical Systems.* John-Wiley, 1980.

[42] J.R. Freeland and N.R. Baker : Goal partitioning in hierarchical organization. *OMEGA* Vol.3, No.6, pp.673–688, 1975.

[43] L.M. Goreux and A.S. Manne, editors : *Multi-Level Planning : Case studies in Mexico.* North-Holland, 1973.

[44] E. Grochla : *Einführung in die Organisationstheorie.* C.E.Poeschel Verlag, 1978. 清水敏允，小田章（訳）: 組織理論入門，文眞堂，(1989).

[45] T. Groves and M. Loeb : Incentives in divisionalized firm. *Management Science* Vol.25, No.3, pp.221–230, 1979.

[46] Y.Y. Haimes : *Hierarchical Analysis of Water Resources Systems.* McGraw-Hill, 1977.

[47] Y.Y. Haimes, editor : *Large Scale Systems.* North-Holland, 1982.

[48] D.M. Himmelblau, editor : *Decomposition of Large-Scale Problems.* North-Holland, 1973.

[49] J. Hirshleifer : On the economic of transfer pricing. *J. of Business* Vol.29, No.3, pp.172–184, 1956.

[50] J.K. Ho and R.P. Sundarraj : *DECOMP : an Implementation of Dantzig-Wolfe Decomposition for Linear Programming.* Springer-Verlag, 1989.

[51] Y.C. Ho and K.C. Chu : Team decision theory and information structures in optimal control problems – part I. *IEEE Transaction on Automatic Control* Vol.AC-17, No.1, pp.15–21, 1972.

[52] T. Ichiishi and M. Quinzii : Decentralization for the core of a production economy with increasing return. *International Economic Review* Vol.24, No.2, pp.397–412, 1982.

[53] M. Jamshidi : *Large-Scale Systems: modeling and control.* North-Holland, 1983.

[54] K.H. Kim and F.W. Roush : *Team Theory.* John Wiley, 1987.

[55] M. Kochen and K.W. Deutsch : Decentralization by function and locaton. *Management Science* Vol.19, No.8, pp.841–856, 1973.

[56] M. Kochen and K.W. Deutsch : A note on hierarchy and coordination: an aspect of decentralization. *Management Science* Vol.21, No.1, pp.106–114, 1974.

[57] J. Kornai and T. Lipták : Two-level planning. *Econometorica* Vol.33, No.1, pp.141–169, 1965.

[58] O. Lange : On the economic theory of socialism. *Review of Economic Studies* Vol.4, pp.53–76,123–142, 1936.

[59] L.S. Lasdon : *Optimization Theory for Large Systems.* MaCmillan, 1970. 志水清孝（訳）: 大規模システムの最適化理論，日刊工業新聞社，(1973).

[60] M.S. Mahmoud, M.F. Hassan, and M.G. Darwish : *Large-Scale Control Systems: theories and techniques.* Marcel Dekker, 1985.

[61] E. Malinvaud : Decentralized procedures for planning. In E. Malinvaud and M.O.L. Bacharach, editors, *Activity Analysis in the Theory of Growth and Planning*, chapter 7, pp. 170–208, MaCmillan, 1967.

[62] J. Marschak : Elements for a theory of teams. *Management Science* Vol.1, No.2, pp.127–137, 1955.

[63] J. Marschak and R. Radner : *Economic Theory of Team.* Yele Uni. Prs., 1972.

[64] T. Marschak : Centralization and decentralization in economic organizations. *Econometrica* Vol.27, No.3, pp.399–430, 1959.

[65] T. Marschak : On the comparison of centralized and decentralized economies. *American Economic Review* Vol.59, No.2, pp.525–537, 1969.

[66] B.R. Meijiboom : *Planning in Decentralized Firms.* Springer-Verlag, 1987.

[67] M.D. Mesarović : Multilevel systems and concepts in process control. *Proceedings of the IEEE* Vol.58, No.1, pp.111–125, 1970.

[68] M.D. Mesarović, D. Macko, and Y. Takahara : *Theory of Hierarchical, Multilevel, Systems.* Academic Press, 1970.

[69] S. Moon : Application of generalized Benders decomposition to a nonlinear distribution system desgin problem. *Naval Research Logistics* Vol.36, No.3, pp.283–295, 1989.

[70] T.W. Ruefli : Behavioral externalities in decentralized organizations. *Management Science* Vol.17, No.11, pp.B649–B657, 1971.

[71] T.W. Ruefli : A generalized goal decomposition model. *Management Science* Vol.17, No.8, pp.B505–B518, 1971.

[72] H.A. Simon, G. Kozmetsky, H. Guetzkow, and G. Tyndall : *Centralization vs. Decentralization in Organizing the Controller's Department.* Graduate School of Industrial Administration Carnegie Institute of Technology, 1954.

[73] M.G. Singh : *Decentralised Control.* North-Holland, 1981.

[74] M.G. Singh and A. Titli : *SYSTEMS: Decomposition, Optimisation and Control.* Pergamon Press, 1978.

[75] D.J. Sweeney, E.P. Winkofsky, P. Roy, and N.R. Baker : Composition vs. decomposition: two approaches to modeling organizational

decision processes. *Management Science* Vol.24, No.14, pp.1491–1499, 1978.

[76] H. Tamura and T. Yoshikawa, editors : *Large-Scale Systems Control and Decision Making.* Marcel Dekker, 1990.

[77] P.T. Tatjewski and B. Engelman : Two-level primal-dual decomposition technique for large-scale nonconvex optimization problems with constraints. *J. of Optimization Theory and Applications* Vol.64, No.1, pp.183–205, 1990.

[78] F.M. Taylor : The guidance of production in a socialist state. *American Economic Review* Vol.19, No.1, pp.1–8, 1929.

[79] P.T. Thach : A decomposition method using a pricing mechanism for min concave flow problem with a hierarchical structure. *Mathematical Programming* Vol.53, No.3, pp.339–359, 1992.

[80] J.D. Thompson : *Organization in Action.* McGraw-Hill, 1967. 高宮晋（監訳）: オーガニゼーション・イン・アクション, 同文舘, (1987).

[81] M.J. Todd : A Dantzig-Wolfe-like variant of Karmarkar's interior-point linear programming algorithm. *Operations Research* Vol.38, No.6, pp.1006–1018, 1990.

[82] P. Tseng : Relaxation method for large scale linear programming using decomposition. *Mathematics of Operations Research* Vol.16, No.4, pp.859–880, 1991.

[83] C. van de Panne : Decentralization for multidivision enterprises. *Operations Research* Vol.39, No.5, pp.786–797, 1991.

[84] C. van de Panne : Decentralization for structured linear programming models. 1989. unpublished paper.

[85] T.J. van Roy : Cross decomposition for mixed-integer programming. *Mathematical Programming* Vol.25, No.1, pp.46–63, 1983.

[86] R.F. Vancil and L.E. Buddrus : *Decentralization: managerial ambiguity by decision.* Dow Jones-Irwin, 1978.

[87] S.S. Vienna : Decentralized optimization of linear economic systems with minimum information exchange of the subsystems. *Zeitschrift für Nationalökonomie* Vol.31, No.1–2, pp.33–44, 1971.

[88] D.D. Šiljak : *Decentralized Control of Complex Systems.* Academic Press, 1991.

[89] D.T. Whitford and W.J. Davis : A generalized hierarchical model of resource allocation. *OMEGA* Vol.11, No.3, pp.279–291, 1983.

[90] D.A. Wismer, editor : *Optimization Methods for Large Scale Systems ...with applications.* McGraw-Hill, 1971.

[91] H.S. Witsenhausen : A counterexample in stochastic optimum control. *SIAM J. Control* Vol.6, No.1, pp.131–147, 1968.

第2章 分権的生産システム

2.1 緒 言

前章で本研究の主題である分権的生産システムを定義したが，本章では従来から研究されてきた一般的な分権的システムを対象とし，その最適化のためのアプローチを概括する．本章で対象とする分権的システムは，いくつかのサブシステムによって構成される大規模で複雑なシステムである．この分権的システムを構成するサブシステムは，他のサブシステムが行う決定の影響を受けることなく自らの決定を行うことができ，その意味で分権的であると解釈されている．このような分権的システムに対する最適化手法には，分割原理に基づいたものとして「価格設定による統合」,「資源配分による統合」,「価格設定と資源配分による統合」および「目標設定方式による統合」がある．分割原理に基づかない最適化手法に目標計画法を適用したものなどが報告されている．次節と2.3節でこれらの手法を概括し，分権的生産システムに対するアプローチとしての妥当性を検討する．2.4節では分権的生産システムのマクロ・モデルに対するアプローチとしてマルチパラメトリック線形計画法に基づく「資源配分による統合」と，ミクロ・モデルに対する非協力ゲームの理論に基づく「生産目標設定方式による統合」を提案し，それぞれの妥当性を検討する．そしてマクロ・モデルとミクロ・モデルを融合した3階層の分権的生産システムの全体的な枠組みを明らかにする．

2.2 分割原理による分権的システム

2.2.1 分割原理による統合法

分権的システムに対する最適化手法を概括するために，本章を通じての前提条件を以下のように設定する．

(1) 分権的システムを構成するサブシステムは N 個存在するものとし，各サブシステムを $S_i (i = 1, \cdots, N)$ で表す．

(2) 各サブシステム S_i は入力 $\boldsymbol{w}_i \in W_i$ を変換して出力 $\boldsymbol{y}_i \in Y_i$ を得る入出力システム $S_i : W_i \to Y_i$ であるとする．ここで $W_i \subseteq \mathrm{R}^n$ と $Y_i \subseteq \mathrm{R}^n$ はサブシステム S_i に対する入力と出力の集合である．

(3) サブシステム S_i は入力 $\boldsymbol{w}_i$ を出力 $\boldsymbol{y}_i$ に変換するプロセス P_i とこれを制御する意思決定者 DM_i で構成される．

(4) 意思決定者 DM_i はある評価基準 D_i に基づいた目的関数 f_i を持ち，これを達成するために，$\boldsymbol{w}_i$ と $\boldsymbol{y}_i$ を観測してプロセスを制御する．この制御を行うための決定変数を $\boldsymbol{x}_i \in X_i$ とする．$X_i \subseteq \mathrm{R}^n$ は決定変数の集合である．

分割原理は大規模で複雑なシステムを小規模で複雑なサブシステムに分割し，その取扱いを容易にするものである．その際，各サブシステムはプロセスを制御するときにサブシステム間の相互干渉（あるいは相互関係）を考慮しないので，各サブシステムを独立したシステムとみなすことができる．分割原理が適用されるシステムは，この意味において分権的であると解釈されている．分割原理では，サブシステム間の相互関係を満たしシステム全体の最適化を達成するために上位レベルにコーディネータを設置し，サブシステムの統合を行う．統合法は何を用いて統合するかによって次の4種類の統合法がある．

(1) 価格設定による統合：システム内に市場メカニズムと類似した統合法を導入したもので，希少性の強い資源に対して高い内部価格を課すことによって資源の有効配分を行ない，システム全体の最適化を行う方法である．

(2) 資源配分による統合：サブシステムが配分される資源に対して価格付けを行い，コーディネータは資源要求の高いサブシステムに優先的に資源を配分し，システム全体の最適化を行う方法である．

(3) 価格設定と資源配分による統合：先の価格設定による統合と資源配分による統合を同時に行う方法である．

(4) 目標設定方式による統合：コーディネータが各サブシステムの活動水準を決定し，サブシステムはその活動水準の実行可能性を検討してコーディネータに報告する方法で，すべてのサブシステムで実行可能性が満たされたときにシステム全体の最適化が達成される．上記の統合法はいずれも統合を行うために双対変数を用いているが，目標設定方式による統合は統合のために双対変数を用いないところにその特徴がある．

サブシステム間に存在する相互関係には，サブシステム間に共通した希少資源が存在する場合のような間接的な相互関係と，サブシステム間に入出力関係が存在する直接的な相互関係がある．前者はシステム干渉と呼ばれ，後者はプロセス干渉と呼ばれている [1]．共通資源の利用可能量を $\boldsymbol{b}_0 \in \mathrm{R}^m$，各サブシステムに配分される共通資源の量を $\boldsymbol{b}_i \in B_i \subseteq \mathrm{R}^m$ とする．B_i は $\boldsymbol{b}_i$ の集合である．サブシステムが利用する共通資源の量が $\boldsymbol{g}_i : Y_i \times X_i \to B_i$ で定められるとすると，システム干渉が存在する場合のサブシステムは次の形で表現される（図 2.1）．

$$\boldsymbol{y}_i = P_i(\boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{x}_i) \tag{2.1}$$

$$\boldsymbol{b}_i = \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i) \tag{2.2}$$

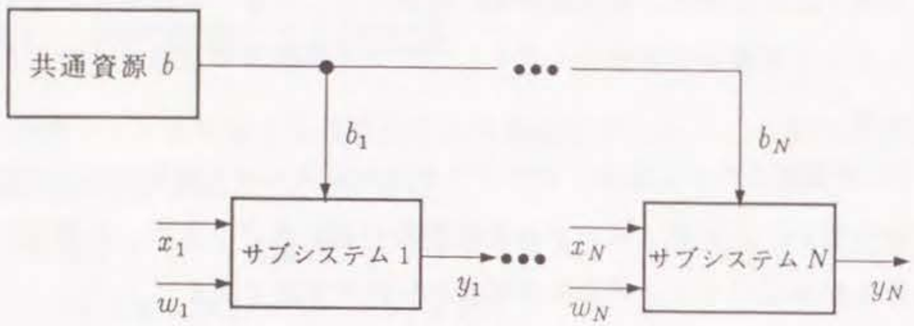


図 2.1 システム干渉

ここで$\boldsymbol{g}_i$は m 次のベクトル値関数である．

さらに，資源制約としてすべてのサブシステムに対し，

$$\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i \leq \boldsymbol{b}_0 \tag{2.3}$$

が成り立たなければならない．

他方，プロセス干渉では，相互関係を表す変数$\boldsymbol{z}_i \in Z_i \subseteq \mathrm{R}^n$と相互関係を表す関数 $K_i : Y \times X \to Z_i$を導入して次のように表現できる（図 2.2）．

$$\boldsymbol{y}_i = P_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{w}_i, \boldsymbol{z}_i) \tag{2.4}$$

$$\boldsymbol{z}_i = K_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}) \tag{2.5}$$

ここで Z_iは$\boldsymbol{z}_i$の集合，$\boldsymbol{y} \in Y$，$Y = Y_1 \times \cdots \times Y_N$，$\boldsymbol{x} \in X$，$X = X_1 \times \cdots \times X_N$である．

議論の展開を容易にするために，評価基準として最大化基準を用いることにし，外部入力$\boldsymbol{w}_i$を無視する．相互関係がシステム干渉である場合は，第 3 章で取りあげる．したがって，本章ではサブシステム間の直接

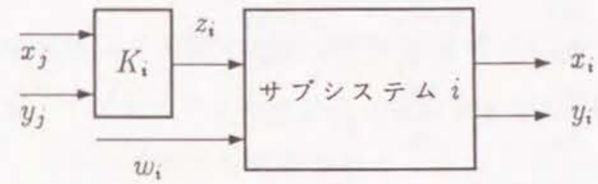


図 2.2 プロセス干渉

の入出力関係を表すプロセス干渉を対象にするが，基本的な考え方は同様である．

分権的システムに分割原理を適用するとき，原問題の目的関数としてサブシステムの目的関数で構成されるシステム全体の目的関数が用いられることが多い．これはサブシステムの目的関数の加法和であり，そのような原問題は次のように定式化されている．

$$\text{Max.} \ \sum_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) \tag{2.6}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y}_i = P_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i), i = 1, \cdots, N \tag{2.7}$$

$$\boldsymbol{z}_i = K_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}), \ i = 1, \cdots, N \tag{2.8}$$

この原問題を最適化するために Lagrange 関数を次のように設定する．

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}_i) \ &\equiv \ \sum_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(P_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) - \boldsymbol{y}_i) \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{\mu}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{z}_i - K_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})) \end{aligned} \tag{2.9}$$

ここで$\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathrm{R}^N$，$\boldsymbol{\mu}_i \in \mathrm{R}^N$は Lagrange 乗数である．これより最適解は次

の必要条件を満たさなければならない．

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{y}_i} = \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{y}_i} - \boldsymbol{\lambda}_i^* - \boldsymbol{\mu}_i^{*\mathsf{T}}\frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{y}_i} = 0 \tag{2.10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} + \boldsymbol{\lambda}_i^{*\mathsf{T}}\frac{\partial P_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} - \boldsymbol{\mu}_i^{*\mathsf{T}}\frac{\partial K_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} = 0 \tag{2.11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{z}_i} = \frac{\partial f_i}{\partial \boldsymbol{z}_i} + \boldsymbol{\lambda}_i^{*\mathsf{T}}\frac{\partial P_i}{\partial \boldsymbol{z}_i} + \boldsymbol{\mu}_i^* = 0 \tag{2.12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} = P_i(\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{z}_i^*) - \boldsymbol{y}_i^* = 0 \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} = \boldsymbol{z}_i^* - K_i(\boldsymbol{y}^*, \boldsymbol{x}^*) = 0 \tag{2.14}$$

式 (2.6)～ (2.8) で表わされる原問題を分権的に解く場合，上位レベルのコーディネータが決定する統合変数に$\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{z}$，$\boldsymbol{x}$のいずれを用いるかによって統合法が異なる．

2.2.2 価格設定による統合

Lagrange 乗数$\boldsymbol{\mu}$を統合変数とするとき，式 (2.9) は次のように展開することができる．

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}_i) &\equiv \sum_{i=1}^{N}\{f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) + \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(P_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) - \boldsymbol{y}_i) \\ &\quad + \boldsymbol{\mu}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z}_i - K_i'(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\mu}))\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} L_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

ここで$\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\mu}_1^{\mathsf{T}}, \cdots, \boldsymbol{\mu}_N^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$である．

これよりサブシステム S_iの最適化問題は$\hat{\boldsymbol{\mu}}_i$が与えられたとき，次のようになる．

$$\text{Max. } f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) + \hat{\boldsymbol{\mu}}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z}_i - K_i'(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i) \tag{2.15}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y}_i = P_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) \tag{2.16}$$

この最適化問題では，サブシステム間の相互関係を表す式 (2.8) に関するLagrange 乗数$\boldsymbol{\mu}$が目的関数内に存在している．経済的解釈によると，このLagrange 乗数はサブシステム間の内部振替価格と解釈されており，コーディネータはサブシステム間の相互関係が均衡するようにこの内部振替価格を決定する．サブシステムはコーディネータより$\boldsymbol{\mu}$の値が与えられると，他のサブシステムの決定に影響されることなく自らの決定変数の値を決めることができる．このことより$\boldsymbol{\mu}$を統合変数とする統合法は「価格設定による統合」と呼ばれている．また統合変数が目的関数内に存在することから"goal coordination method"とも呼ばれ，最適解を求める過程で得られる解は，常に最適ではあるが実行可能性が保たれていないので"infeasible method"ともいう．相互関係がシステム干渉である場合，この内部振替価格は配分される資源に対する価格と解釈されている．

サブシステム間の相互関係を均衡化させるためにコーディネータは$\boldsymbol{\mu}$を適切に設定しなければならない．いま各サブシステムが与えられた$\boldsymbol{\mu}$のもとで式 (2.15)，(2.16) を最適化すると，必要条件式の (2.10)～ (2.13) が等号で成り立つ．したがって，コーディネータは式 (2.14) が成り立つように$\boldsymbol{\mu}$の値を決定する．これにたとえば Newton 法を適用すると次のようになる．

$$\boldsymbol{\mu}^{l+1} = \boldsymbol{\mu}^{l} + \varepsilon\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}} \tag{2.17}$$

ここで lはイテレーション回数，εはステップ巾である．サブシステム間の入出力が均衡したシステム全体の最適解を得るためには，はじめに任意の$\boldsymbol{\mu}^1$に対して各サブシステムが最適化問題 (2.15)，(2.16) を解き，そのときの$\boldsymbol{y}_i^1$，$\boldsymbol{x}_i^1$，$\boldsymbol{z}_i^1$をコーディネータに報告する．コーディネータは各サブシステムから送られてきたこれらの値を用いて式 (2.17) により新しい$\boldsymbol{\mu}^2$を計算し，これを各サブシステムに提示する．各サブシステムはこ

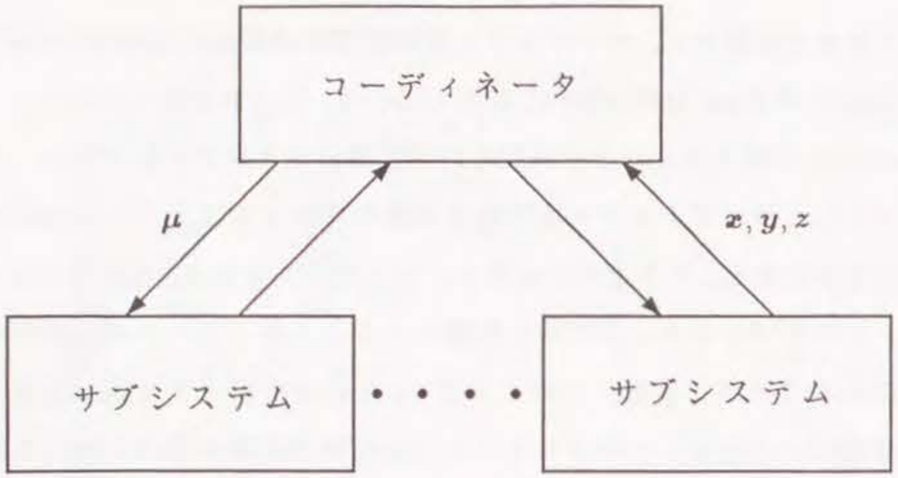


図 2.3 価格による統合

の$\boldsymbol{\mu}^2$を用いて再び式 (2.15)，(2.16) を解く．これを解が収束するまで繰り返す．イテレーションの停止条件はある正の微小量δ，$0<\delta<1$に対して

$$| \boldsymbol{z}_i^l - K_i'(\boldsymbol{\mu}^l, \boldsymbol{y}_i^l, \boldsymbol{x}_i^l) | < \delta \tag{2.18}$$

が成り立つことである．これを図示すると図 2.3のようになる．

2.2.3 資源配分による統合

プロセス干渉が存在する場合の資源配分による統合は，統合変数として相互関係を表す変数$\boldsymbol{z}_i$を用いる．この場合の Lagrange 関数は式 (2.9) より次のようになる．

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}_i) &\equiv \sum_{i=1}^{N}\{f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) + \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(P_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) - \boldsymbol{y}_i) \\ &\quad + \boldsymbol{\mu}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{z} - K'(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i))\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} L_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

ここで$\boldsymbol{z} = (\boldsymbol{z}_1^{\mathsf{T}}, \cdots, \boldsymbol{z}_N^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$である．各サブシステムの最適化問題は，与えられた任意の$\hat{\boldsymbol{z}}$に対して，

$$\text{Max. } f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{z}}) \tag{2.19}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y}_i = P_i(\boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{z}}_i) \tag{2.20}$$

$$\hat{\boldsymbol{z}} = K'(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i) \tag{2.21}$$

となる．

資源配分による統合では，統合変数$\boldsymbol{z}$がサブシステムの制約条件式の中に存在するために"model coordination method"と呼ばれ，最適解を得る過程において得られる解は，最適性は保証されないが常に実行可能性を保っているために"feasible method"とも呼ばれている．先の経済的解釈によれば$\boldsymbol{\mu}$は内部振替価格であった．これに従うと$\boldsymbol{z}$は内部振替量であると解釈することができる．コーディネータはサブシステム間の入出力関係を均衡させるようにこの内部振替量$\hat{\boldsymbol{z}}$を決定し，サブシステムの最適化問題の実行可能性を保証する．各サブシステムはコーディネータによって与えられた$\hat{\boldsymbol{z}}$に関する内部振替価格を決定し，これをコーディネータに報告する．相互関係がシステム干渉の場合，$\hat{\boldsymbol{z}}$はコーディネータによって配分される共通資源の量である．

各サブシステムがこの問題を解くことによって，必要条件式 (2.10)，(2.11)，(2.13)，(2.14) が等号で成り立つ．コーディネータは式 (2.12) が成り立つように$\hat{\boldsymbol{z}}$の値を決定する．$\hat{\boldsymbol{z}}$の値は価格設定による統合の場合と同様にして次のように決定する．

$$\hat{\boldsymbol{z}}^{l+1} = \hat{\boldsymbol{z}}^l + \varepsilon \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{z}} \tag{2.22}$$

コーディネータは任意の$\hat{\boldsymbol{z}}^1$を各サブシステムに提示する．各サブシステムは最適化問題 (2.19)~(2.21) を解き，そのときの$\boldsymbol{\lambda}_i^1$，$\boldsymbol{\mu}_i^1$，$\boldsymbol{y}_i^1$，$\boldsymbol{x}_i^1$をコー

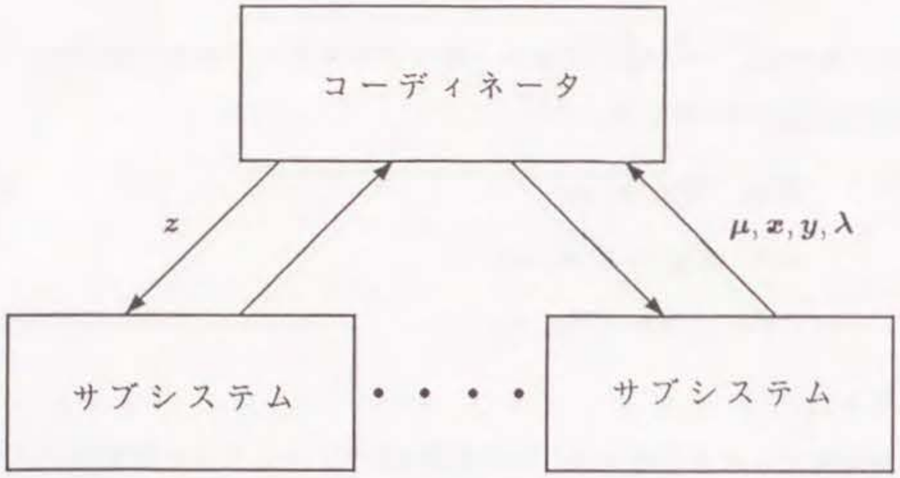


図 2.4 資源配分による統合

ディネータに報告する．コーディネータはこれらの値を用いて式 (2.22) より$\hat{\boldsymbol{z}}^2$を計算し，各サブシステムに提示する．これを解が収束するまで繰り返すわけであるが，ある正の微小量δ，$0 < \delta < 1$に対して，

$$|\,\hat{\boldsymbol{z}}^{l+1} - \hat{\boldsymbol{z}}^{l}\,| < \delta \tag{2.23}$$

のときイテレーションを終了する．このときの解がシステム全体を最適にする最適解になる．これを図示すると図 2.4のようになる．

2.2.4 価格設定と資源配分による統合

この統合法は，価格による統合と資源配分による統合の特徴を生かした方法で，統合変数として$\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{z}$を用いる [13]．この場合の Lagrange 関数は式 (2.9) より次のようになる．

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}_i) &\equiv \sum_{i=1}^{N}\{f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) + \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(P_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) - \boldsymbol{y}_i) \\ &\quad + \boldsymbol{\mu}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{z}_i - K_i^l(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\mu}))\} \\ &= \sum_{i=1}^{N} L_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}) \end{aligned}$$

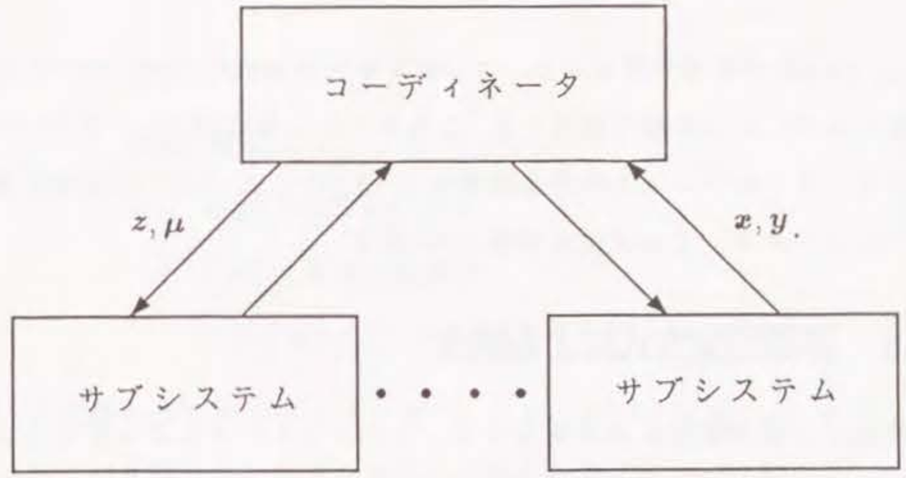


図 2.5 価格と資源配分による統合

サブシステムiの最適化問題は$\hat{\boldsymbol{\mu}}_i$，$\hat{\boldsymbol{z}}_i$が与えられたとき，次のようである．

$$\text{Max. } f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{z}}_i) + \hat{\boldsymbol{\mu}}_i^{\mathsf{T}}\hat{\boldsymbol{z}}_i - K_i^l(\hat{\boldsymbol{\mu}}, \boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i) \tag{2.24}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y}_i = P_i(\boldsymbol{x}_i, \hat{\boldsymbol{z}}_i) \tag{2.25}$$

この問題は価格設定による統合の場合と同様であるが，統合変数が$\boldsymbol{\mu}$だけでなく$\boldsymbol{z}$も統合変数であるところに相違がある．

この統合法は，統合変数として$\boldsymbol{\mu}$と$\boldsymbol{z}$を用いているので，"goal coordination"と"model coordination"を併用した形式になっており，"mixed coordination method"と呼ばれている．経済的解釈に従えば，コーディネータはサブシステム間の内部振替価格$\boldsymbol{\mu}$と内部振替量$\boldsymbol{z}$を決定し，これを各サブシステムに提示することになる．サブシステムはコーディネータによって示された内部振替価格と内部振替量を用いて最適化問題 (2.24)，(2.25) を解き，そのときに得られる$\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{y}_i$をコーディネータに報告する．

サブシステム間の相互関係を均衡化させるために，コーディネータは$\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{z}$を適切に決定しなければならない．いま与えられた$\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{z}$のもとで各サブシステムが式 (2.24)，(2.25) を最適化すると，必要条件式の式 (2.10)，

(2.11)，(2.13) が等号で成り立つ．コーディネータは式 (2.12)，(2.14) が成り立つように$\boldsymbol{\mu}$，$\boldsymbol{z}$の値を決定する．これを行うには式 (2.17) と式 (2.22) を用いる．イテレーションの停止基準は式 (2.18) と式 (2.22) が同時に成り立つことである．この統合法を図 2.5に示す．

2.2.5 目標設定方式による統合

価格設定と資源配分による統合では，コーディネータによって与えられた統合変数の値のもとに各サブシステムが決定変数$\boldsymbol{x}_i$の値を求めた．目標設定方式による統合ではこの$\boldsymbol{x}_i$の値をコーディネータが決定し，各サブシステムに対して目標値として提示する方法である．この統合法は Weitzman[14] によってはじめて提案された．この方法は，最適化を行う際に式 (2.9) で与えた Lagrange 関数を用いることはない．コーディネータはサブシステム間に共通する制約条件のもとでシステム全体の目的関数の最適化を行う．いまの場合，共通の制約条件は考慮していないのでコーディネータは原問題の目的関数である式 (2.7) の最適化を行う．すなわち

$$\text{Max.} \ \sum_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) \tag{2.26}$$

を解く．この解を$\boldsymbol{y}_i^1$，$\boldsymbol{x}_i^1$，$\boldsymbol{z}_i^1$とする．コーディネータはこれを目標値として各サブシステムに提示する．すべてのサブシステム S_iについて $(\boldsymbol{y}_i^1, \boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1) \in \Omega_i = \{(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) \mid \boldsymbol{y}_i = P_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i), \boldsymbol{z}_i = K_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})\}$ であれば $(\boldsymbol{y}_i^1, \boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1)$ は全体的最適解である．しかしながらこのような場合は非常にまれで，一般的には $(\boldsymbol{y}_i^1, \boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1) \notin \Omega_i$である．このとき，各サブシステムは与えられた目標値 $(\boldsymbol{y}_i^1, \boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1)$ の実行可能性を調べ，目標値をどのように改良すれば実行可能になるかをコーディネータに報告する．これは次の問題を解

くことによって行うことができる．

$$\text{Max.} \ \boldsymbol{\lambda}_i^1 \|(\boldsymbol{y}_i^1, \boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1)\| \tag{2.27}$$

$$\text{sub. to} \ \boldsymbol{y}_i^1 = \boldsymbol{\lambda}_i^1 P_i(\boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1) \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{z}_i^1 = \boldsymbol{\lambda}_i^1 K_i(\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{x}^1) \tag{2.29}$$

$$0 \le \boldsymbol{\lambda}_i^1 \le 1 \tag{2.30}$$

この問題の解を$\bar{\boldsymbol{\lambda}}_i^1$とすると，$\bar{\boldsymbol{y}}_i^1 = \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i^1 \boldsymbol{y}_i^1$，$\bar{\boldsymbol{x}}_i^1 = \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i^1 \boldsymbol{x}_i^1$，$\bar{\boldsymbol{z}}_i^1 = \bar{\boldsymbol{\lambda}}_i^1 \boldsymbol{z}_i^1$となる．これを用いるとサブシステムの制約条件は$\bar{\boldsymbol{y}}_i^1 = P_i(\bar{\boldsymbol{x}}_i^1,\ \bar{\boldsymbol{z}}_i^1) \Rightarrow \boldsymbol{y}_i^1 = P(\boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1 : \boldsymbol{\lambda}_i^1)$，$\bar{\boldsymbol{z}}_i^1 = K_i(\bar{\boldsymbol{y}}^1, \bar{\boldsymbol{x}}^1) \Rightarrow \boldsymbol{z}_i^1 = K_i(\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{x}^1 : \boldsymbol{\lambda}^1)$ となる．ここで $\boldsymbol{\lambda}^1 = ({\boldsymbol{\lambda}_1^1}^{\mathsf{T}}, \cdots, {\boldsymbol{\lambda}_N^1}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$である．サブシステムはこれによって構成される空間$\Omega_i^1 = \{(\boldsymbol{y}_i^1, \boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1) \mid \boldsymbol{y}_i^1 = P_i(\boldsymbol{x}_i^1, \boldsymbol{z}_i^1 : \boldsymbol{\lambda}_i^1), \boldsymbol{z}_i^1 = K_i(\boldsymbol{y}^1, \boldsymbol{x}^1 : \boldsymbol{\lambda}^1)\}$ をコーディネータに報告する．コーディネータは各サブシステムから報告されたΩ_i^1を制約条件とした次の問題を解く．

$$\text{Max.} \ \sum_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) \tag{2.31}$$

$$\text{sub. to} \ (\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) \in \Omega_i^1, i = 1, \cdots, N \tag{2.32}$$

この解を $(\boldsymbol{y}_i^2, \boldsymbol{x}_i^2, \boldsymbol{z}_i^2)$ として上記と同様に行う．

このような繰り返しをk回行なったときのコーディネータと各サブシステムの問題は次のようになる．

コーディネータの最適化問題：

$$\text{Max.} \ \sum_{i=1}^{N} f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) \tag{2.33}$$

$$\text{sub. to} \ (\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{z}_i) \in \bigcap_{l=1}^{k-1} \Omega_i^l, i = 1, \cdots, N \tag{2.34}$$

サブシステムの問題：

$$\text{Max.} \ \boldsymbol{\lambda}_i^k \|(\boldsymbol{y}_i^k, \boldsymbol{x}_i^k, \boldsymbol{z}_i^k)\| \tag{2.35}$$

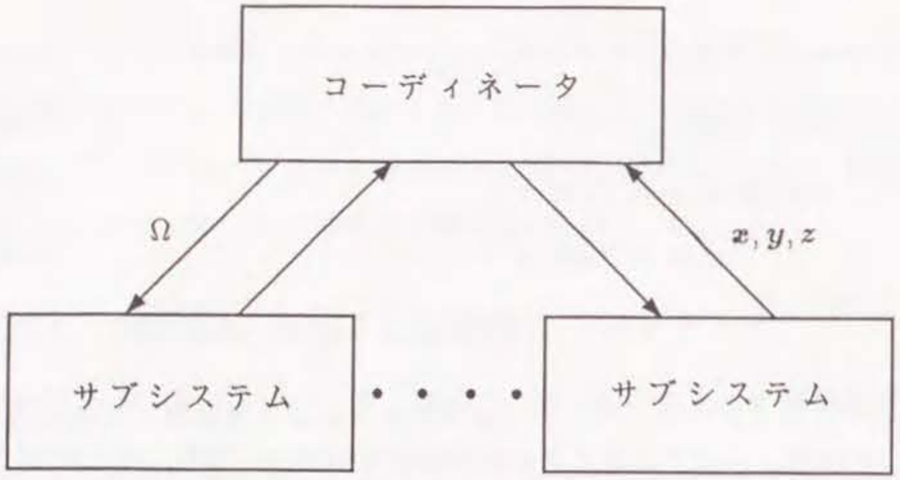


図 2.6 目標設定方式による統合

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y}_i^k = \boldsymbol{\lambda}_i^k P_i(\boldsymbol{x}_i^k, \boldsymbol{z}_i^k) \tag{2.36}$$

$$\boldsymbol{z}_i^k = \boldsymbol{\lambda}_i^k K_i(\boldsymbol{y}^k, \boldsymbol{x}^k) \tag{2.37}$$

$$0 \le \boldsymbol{\lambda}_i^k \le 1 \tag{2.38}$$

繰り返しの過程で得られる解 $(\boldsymbol{y}_i^k, \boldsymbol{x}_i^k, \boldsymbol{z}_i^k)$ は実行不可能な解であるが，これがすべてのサブシステムで実行可能となったとき，そのときの解が最適解である．この手続きの収束性は保証されている [2]．

コーディネータは繰り返しを経るにしたがってサブシステムの制約Ω_i^lに関する情報を得るので，$\boldsymbol{y}_i$，$\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{z}_i$の値を精緻化させることができる．しかしながらこの統合法では，サブシステムはコーディネータによって与えられる目標値の実行可能性を検討するのみである．また決定変数$\boldsymbol{y}_i$，$\boldsymbol{x}_i$，$\boldsymbol{z}_i$の決定はコーディネータによってなされ，サブシステムでは決定しないので，サブシステム独自の最適化問題は存在しない．サブシステムの問題の決定変数$\boldsymbol{\lambda}_i$は，コーディネータによって与えられる目標値を実行可能にするための修正の程度を表わしていると解釈できる．この統合法を図示すると，図 2.6のようである．

2.2.6 考察

これまで分割原理に基づく 4 種の統合法を概観してきた．いずれの統合法においてもコーディネータはサブシステム間の相互関係を調整するために設置されたもので，従来から「中央計画当局」あるいは「上位レベルの意思決定者」などと経済的に解釈されてきた．しかしながら，第 1 章で明らかにしたように企業組織などでは上位レベルの意思決定者は，下位レベルであるサブシステムの意思決定者よりも大局的で包括的な計画を作成し，その計画に基づいて統制を行ない，結果の評価を行うものである．統制の中にサブシステム間の相互関係の調整が含まれる場合もあるが，それが上位レベルの意思決定者の主たる職分ではない．最適化の過程においても，コーディネータは相互関係を表す変数$\boldsymbol{z}$の勾配，すなわち経済的解釈による$\boldsymbol{z}$の潜在価格 (shadow price) や$\boldsymbol{z}$そのものの計算，決定変数の計算のみを行なっている．企業などの組織ではサブシステム間の相互関係の調整は，サブシステム間の情報交換によって行なわれ，上位レベルの意思決定者が専ら行うことはない．上位レベルの意思決定者は，サブシステム間の調整を行う場合もあるかもしれないが，それはサブシステム間での調整が成功しないなど，そのときの状況によると考えられる．

次にサブシステムが直列に並んだ大規模システムを考える．分割原理においては，間接的な相互関係にある 2 つのサブシステムは，一方のサブシステムの情報を間に存在するサブシステムを介してのみ知ることができる．たとえば図 2.7に示すように，コーディネータはサブシステム 1 とサブシステム 2，あるいはサブシステム 2 とサブシステム 3 のように直接的な相互関係にあるサブシステム間の調整のみを行い，サブシステム 1 とサブシステム 3 のように間接的な相互関係にあるサブシステム間

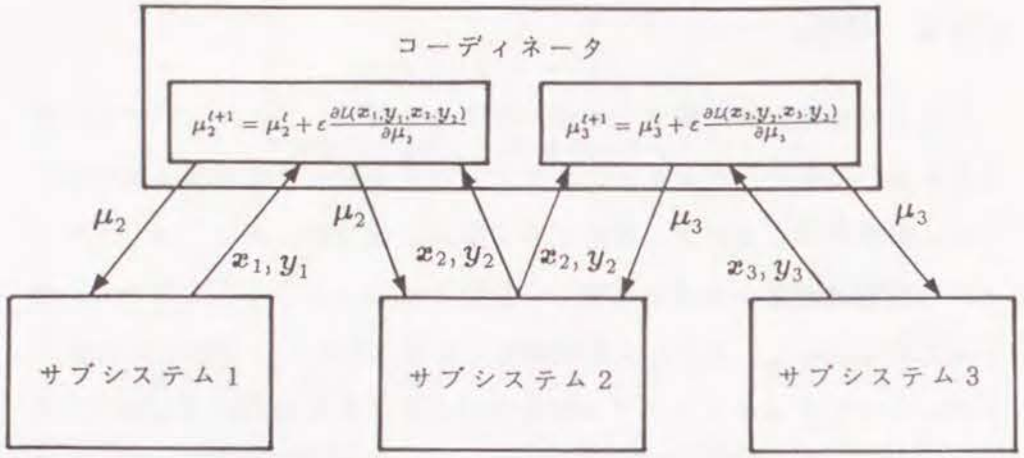


図 2.7 コーディネータによる調整

の調整を行わない．したがって，サブシステム1とサブシステム3はサブシステム2の変数$\boldsymbol{x}_2$，$\boldsymbol{y}_2$を通じてのみ互いに相手の情報を知ることができる．サブシステム1になんらかの変化が生じたとき，その変化はサブシステム2に影響を与え，サブシステム3はサブシステム2の変化としてそれをそれを知ることになる．したがってサブシステム1に変化が生じてからサブシステム3がそれを知るまでに時間遅れが生じる．これを防ぐには，さらに上位レベルのコーディネータを設置し，下位のコーディネータ間の調整を行うことにより，間接的な相互関係を調整するようにする．したがって，分割原理に基づく分権的システムでは，システムが持つ固有の組織構造と関わりなく組織化されることになる．

上記のように，分割原理は大規模システムの最適化を分権的に行うことに意義があるといえる．第1章でみてきたように，企業における決定権限の委譲は，ある一つの決定問題を独立的ないし準独立的な部分問題に分割することを必要とする．これに対する類似が分割原理に見いだされるので，分割原理に基づいた最適化問題は一種の分権的システムであ

るとみなされている．このような考え方に対して，Dantzig と Wolfe[5] や Lasdon[10] は，分割原理による決定過程は，完全な決定権の分散化とはみなすことができないと批判している．また Hax[8] や Albach[3] は，分割原理では最適解の最終決定はコーディネータが行なっており，各サブシステムが独自に最適解を得ることができないとしている．Baumol と Fabian[4] はシステム全体の最適解は，サブシステムの実行可能領域の内点である場合が存在し，全体的最適解が必ずしも部分問題の最適解にならないことを指摘している．これらのことより，分割原理に基づく分権的システムはシステムの組織構造を明確に表現したものではなく，単に計算の都合上その類似点が見いだされるという理由で論じられているといえる．

分割原理には，システム全体の目的関数と制約条件の分割可能性，あるいは逆にサブシステムの目的関数と制約条件の加算性に関する前提条件が存在する．分割原理は，システム全体の目的関数と制約条件を部分的な目的関数や制約条件に分割し，付加的な上位レベルのシステム（コーディネータ）を設置するものである．この場合，システム全体の最適化のための計算はサブシステムにおいて行なわれ，上位レベルは最適化が達成されるようにサブシステムの統制を行う．これはシステム全体の目的関数と制約条件を分割することによってサブシステムの最適化問題を作成することができる，あるいはサブシステムの目的関数と制約条件を加算することによってシステム全体の目的関数と制約条件を作成することができる，という前提条件に基づいているからである．したがって，分割原理を適用する際には，原問題として定式化されるシステム全体の最適化問題が分割可能であるかが議論されることになる．

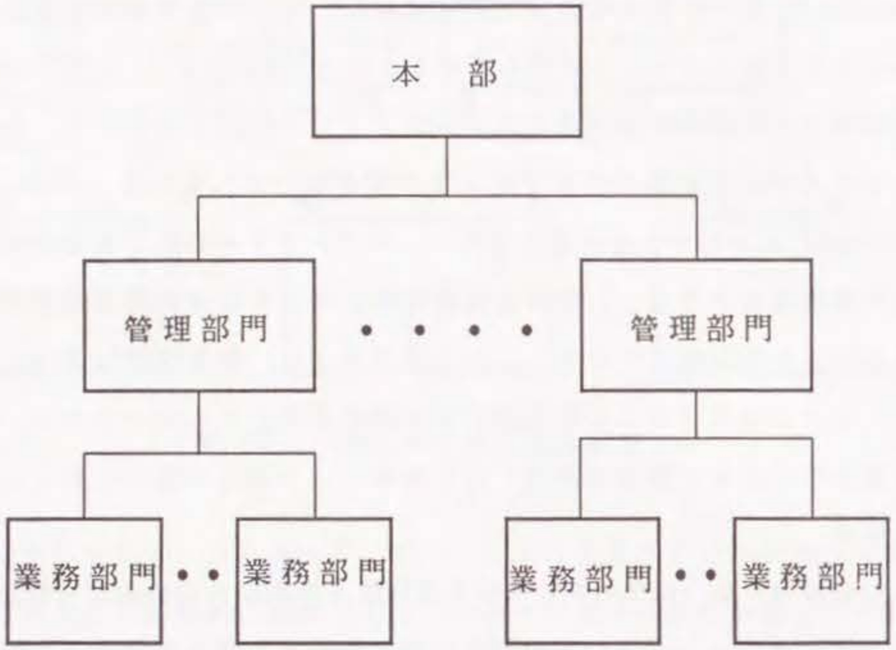


図 2.8 GGD モデル

2.3　目標計画法による分権的システム

分割原理に基づかない分権的システムに対するアプローチに目標計画法に基づいた方法がある．Ruefli[12, 11] は，企業の組織構造に基づいて定式化した GGD モデル (Generalized Goal Decomposition model) を提案している．このモデルは図 2.8に示すように，本部 (central unit) と管理部門 (management unit)，および業務部門 (operating unit) からなる 3 階層の組織構造を持つモデルで，これに目標計画法を適用している．本部は各管理部門に目標値（資源）を割り当てることによって各管理部門の活動を調整する．管理部門は，割り当てられた目標値（資源）の 1 単位当

りの価格である双対価格を計算し，本部と業務部門に報告する．業務部門は，管理部門によって課せられた双対価格の合計を最小にするようにプロジェクトの活動レベルを決定し，これを管理部門に報告する．他方，本部は各管理部門から報告された双対価格を用いて目標値（資源）の割り当て方を検討する．Ruefli はこのような問題を次のように定式化している（記号は Ruefli の定義に従う）．

本部の決定問題は，各管理部門から受け取る収益を最大化する問題として次のように定式化されている．

$$\text{Max.} \ \sum_{k=1}^{M} \Pi_k G_k \tag{2.39}$$

$$\text{sub. to} \ \sum_{k=1}^{M} P_k G_k \leq G_0 \tag{2.40}$$

$$G_k \geq 0, k = 1, \cdots, M \tag{2.41}$$

管理部門の決定問題は，本部によって定められた目標値からのずれを最小化する次のような問題である．

$$\text{Min.} \ W_k^+ Y_k^+ + W_k^- Y_k^- \tag{2.42}$$

$$\text{sub.to} \ \sum_{j=1}^{n_k} A_{jk} x_{jk} - I_{mk} Y_k^+ + I_{mk} Y_k^- = G_k \tag{2.43}$$

$$0 \leq x_{jk} \leq 1, Y_k^+ \geq 0, Y_k^- \geq 0, j = 1, \cdots, n_k \tag{2.44}$$

業務部門の決定問題は，管理部門によって課せられた費用を最小化する問題として次のように定式化されている．

$$\text{Min.} \ \Pi_k A_{jk} \tag{2.45}$$

$$\text{sub. to} \ D_{jk} A_{jk} \geq F_{jk} \tag{2.46}$$

$$A_{jk} \geq 0 \tag{2.47}$$

ここで，G_k: 管理部門 kに割り当てられる目標値ないし資源の量，G_0: G_k の制約値，P_k: G_kと G_0の間の関係を表す係数，Π_k: 双対価格，A_{jk}: プロジェクト案，x_{jk}: プロジェクトの達成レベル，W_k^+, W_k^-, I_{mk}: 重み係数，M: 管理部門数，n_k: 管理部門 kに属する業務部門数である．

このGGDモデルでは，管理部門が本部から割り当てられた資源を使用する際に，資源1単位当りの価格（双対価格）を支払うということであるので，本部は各管理部門から受け取る収益の合計が最大になるように資源の配分を決定する．これに対して管理部門は，本部から指示された資源の量を目標値としてできるかぎり達成すると同時に本部へ支払うべき費用の最小化をはかる．このような考え方は Kornai と Lipták [9] と同様である．またこのモデルは，資源配分問題であり，G_kを目標値として解釈すれば双対価格Π_kの解釈が成り立たない．これは G_kを管理部門の決定問題では目標値とし，本部の決定問題では資源と解釈しており，その解釈に一貫性が保たれていないからである．さらに本部問題に管理部門の相互関係を表す条件式がなく，双対価格の値によっては特定の管理部門に資源が集中的に配分される場合が生じ，解の収束性が保証されていないなどの問題点がある．

このGGDモデルを拡張したものに，Freeland と Baker による goal partitioning [7] がある．このモデルは本部と管理部門で構成される2階層組織を対象としており，階層間でなされた過去の交渉において割り当てられた目標値とそのときの達成された値の差を用いて，再割り当て後の目標達成値が最小になるように目標値を決定するものである．このモデルにおける subordinate decision problem は Ruefli の管理部門の問題に管理部門独自の目的と制約条件を加えたものである．さらに，本部問題の目的関数は管理部門の”不満 (dissatisfaction)”の合計の最小化であり，双対

変数を目標値の変化に対する尺度であるとしているが，具体的な解釈は不明である．また最適化のためのイテレーションの回数が増えると，本部問題の制約式が増加する．Davis と Talavage[6] は GGD モデルに基づいて，generalized goal decomposition model と hybrid goal decomposition model を提案しており，Whitford と Davis [15] は GGD モデルの各階層に目標計画法を適用した GHM(Generalized Hierarchical Model) を提案している．

2.4 分権的生産システムの構造

2.2節で分割原理による分権的システムを考察した．その結果，分割原理は分権的システムに対する適切なアプローチであるとはいえず，本研究が対象としている分権的生産システムに適用することは困難であるといえる．それは第1章で明らかにしたように分権的生産システムは，意思決定権限の分割と分散によって分権的に組織化されたシステムであるからで，必ずしも最適化問題として定式化された数学モデルの分割可能性に基づいて分権化されるものでないからである．さらに，上位レベルのシステムである本部や工場の管理部門の職務は，それぞれの下位レベルのシステムである工場や工程の間に存在する相互関係を調整するだけではない．分権的生産システムの各レベルはそれぞれ達成すべき目標とそれに関するなんらかの制約を持っており，その制約のもとで目標を達成しようとするとき，あわせて下位レベルのシステム間の相互関係の調整を行うものである．これを行うにはシステムの組織構造に基づいた分権化を必要とする．

組織構造に基づいた分権化に関する研究に前節で取り上げた Ruefli らのアプローチがある．しかし双対変数を本部が配分する資源に対して支

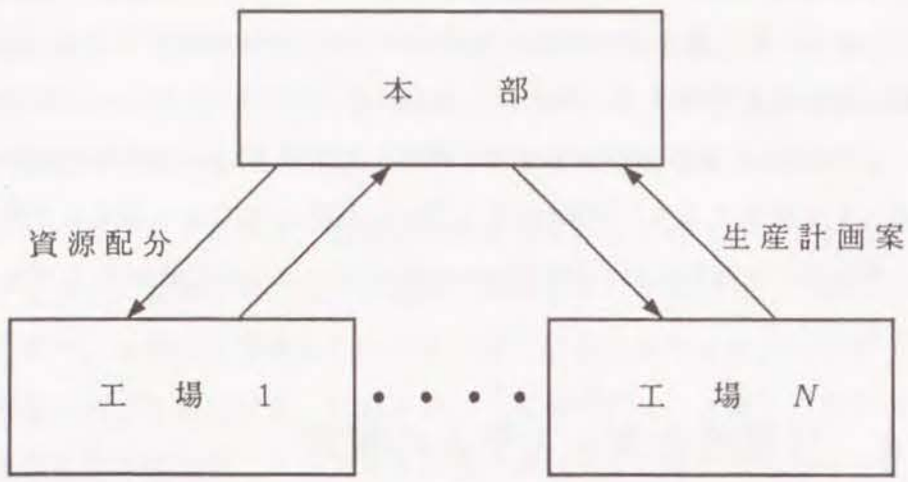


図 2.9 分権的生産システムのマクロ・モデル

払う価格であると解釈しているが，管理部門の問題では配分される資源を目標値としており，目標値になんらかの費用を支払うことは解釈上無理がある．これは前述したように，本部問題では資源として取り扱っている変数を管理部門の問題では目標値であるとしており，解釈に一貫性がないからである．

本研究では，前章で述べたように3階層の組織構造を持つ分権的生産システムを対象としており，本部と工場による2階層のマクロ・モデルと，工場の管理部門と工程による2階層のミクロ・モデルを考える．このマクロ・モデルとミクロ・モデルの概要を以下に述べる．

マクロ・モデルは図 2.9に示すように1つの本部と N 箇所の工場で構成されており，各工場を添字 $i(=1,\cdots,N)$ で表す．本部は各工場に対して生産に必要な資源 $\boldsymbol{b}_i$ を制約条件 $G(\boldsymbol{b}_i) \leq \boldsymbol{b}_0$ のもとで評価関数 $Z(\boldsymbol{b}_i)$ を最適にするように配分する．ここで $\boldsymbol{b}_0$ は工場に配分することのできる資源

の量である．本部によって配分される資源は，資金や労働量，共通原材料などで，たとえば $\boldsymbol{b}_i$ が資金であれば，制約条件 $G(\boldsymbol{b}_i)$ は予算制約とみなすことができる．評価基準 $Z(\boldsymbol{b}_i)$ はシステム全体の評価基準で，事業部制組織の場合では，事業部利益を集約した全社的利益が採用されることが多い．工場は本部によって配分された資源を用いて生産計画 $\boldsymbol{X}_i$ を制約条件 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X}_i) \leq \boldsymbol{b}_i$ および $\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{X}_i) \leq 0$ のもとで評価関数 $z_i(\boldsymbol{X}_i)$ を最適にするようにたてる．工場の生産計画は，製造する製品の具体的な生産量や在庫量などで，制約条件 $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X}_i)$ は配分される資源に関する制約，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{X}_i)$ は利用可能な生産設備など工場独自の制約である．評価基準 $z_i(\boldsymbol{X}_i)$ は生産計画によってもたらされる利益や費用で，本部の評価基準 Z の構成要素である．

本研究では前章で述べたように，本部による工場の統合は bottom-up 方式を採用している．この統合法に基づく本部と工場の情報交換は次のようである．工場は本部に対して実行可能な生産計画とそれを実施するのに必要な資源を報告する．これを工場の生産計画案と呼ぶことにする．これは生産計画とその評価基準，および生産計画の実施を可能とする資源の配分量の範囲である計画実施領域からなる．計画実施領域を $R_i(\boldsymbol{b}_i)$, $i=1,\cdots,N$ とし，工場 i における生産計画案を次のように表記することにする．

$$\mathcal{P}_i^{(k_i)} = \{\boldsymbol{X}_i^{(k_i)}, z_i(\boldsymbol{X}_i^{(k_i)}), R_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)\}, k_i = 1,\cdots,K_i \tag{2.48}$$

ここで k_i は工場 i が本部に報告する生産計画案を表す指標で，K_i はその数である．この生産計画案 $\mathcal{P}_i^{(k_i)}$ は，計画実施領域 $R_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ で示される範囲の資源配分を受けると，生産計画 $\boldsymbol{X}_i^{(k_i)}$ を実施することができ，評価基準 $z_i(\boldsymbol{X}_i^{(k_i)})$ を達成することができることを意味している．生産計画案の集合を

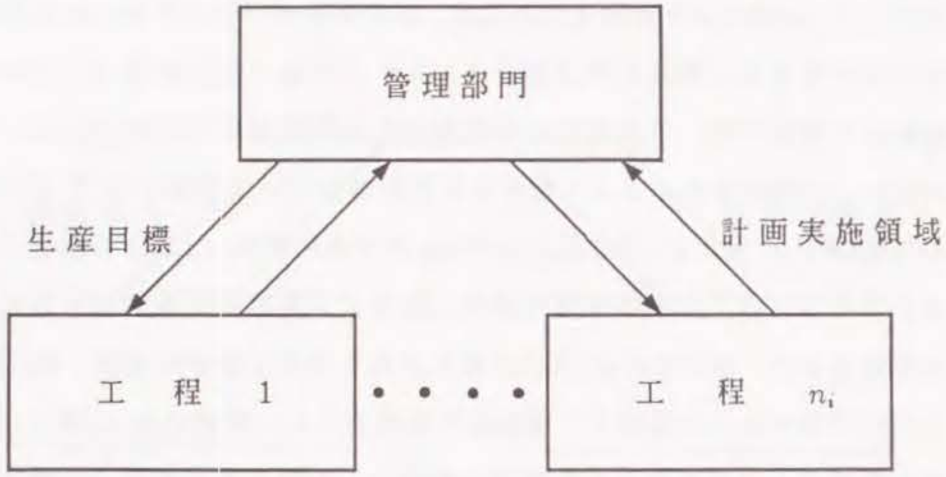


図 2.10 分権的生産システムのミクロ・モデル

$$\mathcal{P}_i = \{\mathcal{P}_i^{(k_i)} \mid k_i = 1,\cdots,K_i\} \tag{2.49}$$

とする．本部における配分可能な資源に関する制約領域を $W = \{\boldsymbol{b} \mid G(\boldsymbol{b}) \leq \boldsymbol{b}_0\}$ とすると，本部の資源配分計画は次のような一般的な形式で表わすことができる．

$$Z : W \times \mathcal{P}_1 \times \cdots \times \mathcal{P}_N \rightarrow \mathbf{R} \tag{2.50}$$

工場 i は 1 つの管理部門と n_i箇所の工程で構成されるものとし，各工程を添字 j_i, $(j_i = 1_i,\cdots,n_i, i = 1,\cdots,N)$ で表す．工場は生産計画案を作成し，これを本部に報告するとともに，工場の管理部門は工場を構成する n_i箇所の各工程に対して，生産計画の具体的な値である生産計画値を生産目標として指示する．工程は指示された生産目標を達成することのできる領域 $R_{Fij_i} = \{\boldsymbol{X}_{ij_i} \mid \zeta_{ij_i}(\boldsymbol{X}_{ij_i}) \geq 0\}$ を管理部門に報告する．ここで$\zeta_{ij_i}(\boldsymbol{X}_{ij_i})$ は工程によって作成される生産目標に対する制約である．工場の制約領域を $U_i(\boldsymbol{b}_i) = \{\boldsymbol{X}_i \mid \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X}_i) \leq \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{X}_i) \leq 0\}$ とし，工場の生産計画問題を一般的な形式で表すと，次のようになる．

$$z_i : U_i(\boldsymbol{b}_i) \times R_{Fi1_i} \times, \cdots, \times R_{Fin_i} \rightarrow \mathbf{R} \tag{2.51}$$

工場 i の管理部門と工程に関するミクロ・モデルを図 2.10に示す．上記の生産計画問題はミクロ・モデルにおける上位レベルの問題でもある．ミクロ・モデルの下位レベルである工程は，他の工程と必要な情報を交換して工程間の相互関係を満たし，かつ生産目標の達成を実現する自らの工程の生産計画を作成する．工場 i を構成する工程 j_iの生産計画と評価基準，および制約関数をそれぞれを$\boldsymbol{x}_{ij_i}$，f_{ij_i}，$\boldsymbol{h}_{ij_i}(\boldsymbol{x}_{ij_i})$ とする．工程 j_i の実行可能領域を $H_{ij_i} = \{\boldsymbol{x}_{ij_i} \mid \boldsymbol{h}_{ij_i}(\boldsymbol{x}_{ij_i}) \leq 0\}$ とし，他の工程との情報交換によって得ることのできる情報をη_{ij_i}とする．そのとき工程 j_iの生産計画問題の一般的な表現は次のようである．

$$f_{ij_i} : H_{ij_i} \times \eta_{ij_i} \rightarrow R_{Fij_i} \tag{2.52}$$

マクロ・モデルにおける統合変数と上位レベルへのフィードバック情報は$\boldsymbol{b}_i$と $\mathcal{P}_i$であり，ミクロ・モデルのそれは$\boldsymbol{X}_{ij}$と R_{Fij_i}である．この 3 つの階層間のこれらの情報交換を図 2.11に示す．

ここに示した 3 階層の分権的生産システムでは，工場の生産計画だけでなく最下位層の工程の生産計画も工場の生産計画を通じて本部の資源配分計画に影響を及ぼしている．これは上位レベルの指示に基づいて計画を作成する場合とは異なり，下位レベルの自律性をより大きく認めたものになっている．システムの階層構造は，システムの持つ固有の組織構造である工場と工程に基づいて構造化されており，分割原理のように定式化した数学モデルの構造に基づいていない．したがって，分割可能性あるいは加算性に関する前提条件を設定する必要もない．工場と工程

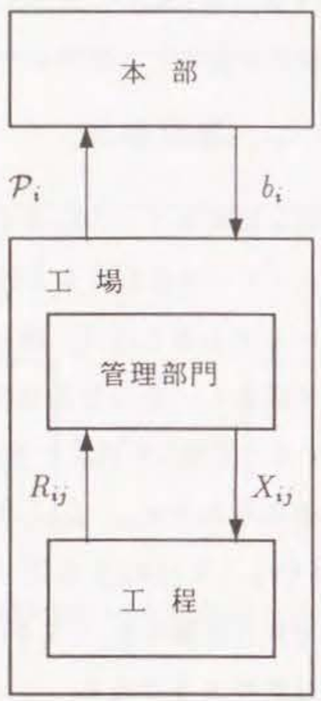


図 2.11 階層間の情報交換

は自らの生産計画に関する決定権限を有しており，それに基づいてなされた決定は，後の章で明らかにするようにシステム全体の最適化が達成されたとき最適決定になる．

2.5 結言

本章では，分権的システムに対する従来からのアプローチである分割原理の妥当性を検討した．そこでは，サブシステム間の相互関係にはプロセス干渉とシステム干渉が存在し，相互関係がプロセス干渉の場合について代表的な統合方策である「価格設定による統合」,「資源配分による統合」,「価格設定と資源配分による統合」,「目標設定方式による統合」を概括し，分権的システムへのアプローチとしての解釈上の問題点を指摘した．そして分割原理が必ずしも組織構造に基づいて分権化された分権的システムに対する適切なアプローチであるとはいえないことを明らかにした．さらに，組織構造に基づいたアプローチとして目標計画法による方法を概括し，その解釈上の問題点を指摘した．

これらのことをふまえて，本研究の対象である 3 階層の分権的生産システムをマクロ・モデルとミクロ・モデルに分けて考え，それを一般的な表現で定式化し，その構造を示した．

参考文献

[1] 高原康彦 : システム工学の理論. 日刊工業新聞社, 1974.

[2] 中野文平 : 分権化組織における調整方式に関する研究. 博士論文, 東京工業大学, 1972.

[3] H.A. Albach : Die koordination der planung im großunternehmen. *Zeitschrift für Betriebswirtschaft* Vol.36, No.12, pp.790–804, 1966.

[4] W.J. Baumol and T. Fabian : Decomposition, pricing for decentralization and external economies. *Management Science* Vol.11, No.1, pp.1–32, 1964.

[5] G.B. Dantzig and P. Wolfe : Decomposition principle for linear programs. *Operations Research* Vol.8, No.1, pp.101–111, 1960.

[6] W. Davis and J. Talavage : Three-level models for hierarchical coordination. *OMEGA* Vol.5, No.6, pp.709–720, 1977.

[7] J.R. Freeland and N.R. Baker : Goal partitioning in hierarchical organization. *OMEGA* Vol.3, No.6, pp.673–688, 1975.

[8] H. Hax : *Die Koordination von Entschedungen.* Carl Heymans Verlag K., 1965.

[9] J. Kornai and T. Lipták : Two-level planning. *Econometorica* Vol.33, No.1, pp.141–169, 1965.

[10] L.S. Lasdon : *Optimization Theory for Large Systems.* MaCmillan, 1970. 志水清孝（訳）: 大規模システムの最適化理論, 日刊工業新聞社, (1973).

[11] T.W. Ruefli : Behavioral externalities in decentralized organizations. *Management Science* Vol.17, No.11, pp.B649–B657, 1971.

[12] T.W. Ruefli : A generalized goal decomposition model. *Management Science* Vol.17, No.8, pp.B505–B518, 1971.

[13] M.G. Singh and A. Titli : *SYSTEMS: Decomposition, Optimisation and Control.* Pergamon Press, 1978.

[14] M. Weitzman : Iterative multilevel planning with production targets. *Econometrica* Vol.38, No.1, pp.50–65, 1970.

[15] D.T. Whitford and W.J. Davis : A generalized hierarchical model of resource allocation. *OMEGA* Vol.11, No.3, pp.279–291, 1983.

第3章 資源配分による分権的生産システム

3.1 緒言

本章では，前章で一般的な形で定式化した分権的生産システムのマクロ・モデルを具体的に構築し，資源配分による統合問題として最適化解析を行う．前章ではサブシステム間の相互関係がプロセス干渉である場合について，分割原理に基づく統合法を概括した．本章では，はじめに相互関係がシステム干渉である従来の資源配分問題を取りあげ，その統合法について概括し，その妥当性を検討する．ついで，本研究で提案する「資源配分による統合」に基づくマクロ・モデルの定式化を行ない，その最適化解析を行う．その際，はじめに線形モデルの場合について解析を行ない，次にこれを2次計画モデルに拡張する．さらに，マクロ・モデルの工場間にプロセス干渉である技術的相互関係が存在する場合を取りあげる．

3.2 資源配分による統合問題

3.2.1 資源配分問題と価格設定による統合

ここで取りあげる資源配分問題は，次のように分割可能な問題である．

$$\text{Max.} \ \sum_{i=1}^{N} z_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{3.1}$$

$$\text{sub. to} \ \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{b}_0 \tag{3.2}$$

$$\boldsymbol{x}_i \in \mathrm{S}_i, i = 1, \cdots, N \tag{3.3}$$

ここで $\mathrm{S}_i = \{\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{d}_i, \boldsymbol{x}_i \geq 0\}, \boldsymbol{x}_i = (x_{i1},\cdots,x_{im_i})^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{b}_0 = (b_{01},\cdots,b_{0\ell})^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{d}_i = (d_{i1},\cdots,d_{ip_i})^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{g}_i = (g_{i1},\cdots,g_{i\ell})^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{h}_i = (h_{i1},\cdots,h_{ip_i})^{\mathsf{T}}$ である．また z_iは実数値関数，$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{h}_i$はベクトル値関数である．この問題に対して次の仮定が成り立つものとする [12]．

(A1)S_iは空でないコンパクト凸集合である．

(A2)$z_i(\boldsymbol{x}_i)$ は凹関数でかつ S_i上で微分可能である．

(A3)$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ は S_i上で凸関数でかつ微分可能である．

(A4) 原問題 (3.1)～(3.3) は実行可能解を持つ．

システム干渉が存在する場合の「価格設定による統合」は，統合変数に原問題 (3.1)～(3.3) の双対変数を用いる場合である．そこで原問題の Lagrange 関数を次のように設定する．

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\lambda}) &\equiv \sum_{i=1}^{N} z_i(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{b}_0 - \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)) + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\mu}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\{z_i(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{\mu}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)\} + \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}_0 \quad (3.4)
\end{aligned}
$$

ここで$\boldsymbol{\lambda} \in \mathrm{R}^{\ell}$，$\boldsymbol{\mu}_i \in \mathrm{R}^{p_i}$は Lagrange 乗数である．これより，最適解は次の必要条件を満たさなければならない．

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \frac{\partial z_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} - \boldsymbol{\lambda}^{*\mathsf{T}}\frac{\partial \boldsymbol{g}_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} - \boldsymbol{\mu}_i^{*\mathsf{T}}\frac{\partial \boldsymbol{h}_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}} = \boldsymbol{b}_0 - \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i^*) = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} = \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i^*) = 0 \quad (3.7)$$

価格設定による統合では，統合変数として Lagrange 乗数 $\boldsymbol{\lambda}$を用いる．したがって，Lagrange 関数式 (3.4) より原問題を N個の部分問題に分割すると，部分問題は次のようになる．

$$\text{Max.}\ z_i(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) \quad (3.8)$$

$$\text{sub. to}\ \boldsymbol{x}_i \in \mathrm{S}_i \quad (3.9)$$

これがサブシステム S_iの最適化問題になる．上位レベルの本部が，各サブシステムに対して$\boldsymbol{\lambda}$の値を設定すると，サブシステムは上記の必要条件で式 (3.5) と (3.7) が成り立つように$\boldsymbol{x}_i^*$，$\boldsymbol{\mu}_i^*$を決定する．本部は，各サブシステムからこの$\boldsymbol{x}_i^*$の報告を受け取り，式 (3.6) が成り立つように新たな$\boldsymbol{\lambda}$を決定する．これを行うには，第 2 章で述べたようにたとえばニュートン法などが適用できる．

相互関係がシステム干渉である場合，統合変数として用いられる Lagrange 乗数はサブシステムが使用する資源の価格であると解釈される．コーディネータは各サブシステムに直接資源を配分することはなく，各サブシステムが示す資源の要求量$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ に基づいて資源の価格$\boldsymbol{\lambda}$を定めることによって，資源の有効利用をはかる．この意味のおいて「価格設定による統合」と呼ばれ，最適化の過程において得られる解は最適ではあるが実行不可能であるので，プロセス干渉の場合と同様に"infeasible method"とも呼ばれている．z_i，$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{h}_i$がともに線形関数であるときの解法に Dantzig-Wolfe の分解原理 [7] がある．

3.2.2 資源配分による統合

$\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{b}_i \leq \boldsymbol{b}_0$が成り立つような任意の$\boldsymbol{b}_i = (b_{i1},\cdots,b_{i\ell})^{\mathsf{T}}$が存在するとき，式 (3.4) の Lagrange 関数は次のように書き換えることができる．

$$
\begin{aligned}
L(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{\lambda}_i) &\equiv \sum_{i=1}^{N} z_i(\boldsymbol{x}_i) + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)) + \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{\mu}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)) \\
&= \sum_{i=1}^{N}\{z_i(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)) + \boldsymbol{\mu}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i))\}
\end{aligned}
$$

これより原問題を N個の部分問題に分割すると，次のようになる．

$$\text{Max.}\ z_i(\boldsymbol{x}_i) \quad (3.10)$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{b}_i \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{x}_i \in \mathrm{S}_i \tag{3.12}$$

この問題は$\boldsymbol{b}_i$が与えられると容易に解くことができるが，その解は必ずしも原問題を最適にはしない．システム全体の最適解を得るためには，部分問題の解が原問題の最適解となるように$\boldsymbol{b}_i$を適切に決定しなければならない．これを行うために，次のような主問題を設定する．

$$\text{Max. } \sum_{i=1}^{N} z_i(\boldsymbol{b}_i) \tag{3.13}$$

$$\text{sub. to } \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i \leq \boldsymbol{b}_0 \tag{3.14}$$

$$\boldsymbol{b}_i \in R_i, i = 1, \cdots, N \tag{3.15}$$

ここで

$$z_i(\boldsymbol{b}_i) = \sup._{\boldsymbol{x}_i}\{z_i(\boldsymbol{x}_i) \quad \text{sub. to } \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{x}_i \in \mathrm{S}_i\} \tag{3.16}$$

$$R_i = \{\boldsymbol{b}_i \in \mathrm{R}^{\ell} \mid \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{b}_i, \quad \text{for some} \quad \boldsymbol{x}_i \in \mathrm{S}_i\} \tag{3.17}$$

である．この主問題は，部分問題の制約領域を満たす$\boldsymbol{b}_i$の範囲 R_iと式 (3.14) のもとに式 (3.1) を最大にするような資源配分を決定する問題である．この主問題は次のような特徴を持つことが知られている [12, 33]．

(C1)$z_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ はそれぞれ凹関数と凸関数であるので，$z_i(\boldsymbol{b}_i)$ は S_i 上で凹，かついたるところで微分不可能な関数である．

(C2)R_iは$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ と S_iの凸性から空でない凸集合である．

(C3) 原問題が実行可能であることから，主問題も実行可能である．

(C4)$z_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ が連続，S_iがコンパクトであることより，部分問題が実行可能であれば，いつでも最適解を持つ．

部分問題 (3.10)~(3.12) は$\boldsymbol{b}_i$が与えられると比較的容易に解くことができるが，主問題 (3.13)~(3.15) では $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ と R_iを陽的に得ることが困難で

あるために，これらを陽的に得ることなしに最適解を得る方法が種々提案されている．$z_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)$ がともに線形関数である問題に対しては，2 レベル法 [25] や直接資源配分法 [34] などが提案されている．

2 レベル法は，配分される資源に対して双対変数で価格付けを行い，コーディネータは資源の配分によって得られる利益を最大にするような配分を決定する．サブシステムは配分された資源に支払う費用を最小にするような決定を行う．Kornai らはこのコーディネータとサブシステム間の関係をゲームの問題として捉えているが，ゲームの利得関数を陽的に表すことが困難であるために，これに Brown-Robinson の模擬プレイ (fictitious play)[32] を適用した逐次解法を提案している．しかしながら解の収束は無限回のイテレーションを必要とするので，小さな正数εを用いたε最適解を提案している．これは新たに得られた解と以前の解との差がε以下であれば，そのときの解を最適解とするものである．

2 レベル法は解の収束性の保証に Brown-Robinson の定理を用いているが，それだけでは不十分であることが指摘されている [6]．ten Kate は，模擬プレイによる収束性に着目しているが，有限回のイテレーションでは収束性が遅いことを指摘し，有限回のイテレーションで収束する直接資源配分法を提案している．

$z_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)$ が非線形関数である場合には，許容方向法 [12, 33] や接線近似法 [12] が提案されている．許容方向法は，ある実行可能な制約条件のもとで式 (3.13) の方向導関数を最大にする方向を探し，資源の最適配分量を決定する方法である．この方法では，方向導関数を陽的に得ることが困難であるので，部分問題の Lagrange 乗数を用いた方向発見問題に置き換えている．接線近似法は，任意の$\boldsymbol{b}_i$に対する $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ の線形支持関数を用いて $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ を近似する方法である．これによって $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ は線形

支持関数で構成される連続な区間線形関数で近似することができる．他方，R_iは1，2次元以外の場合では外側線形化と内側線形化によって近似されている．

これらの方法以外では，Bendersの分解原理を用いて目的関数の支持平面と切除平面を求め，これらを制約条件とした問題を解くためのアルゴリズムを提案している [37] や，制約条件に確率変数を含む2階層分権的管理 (two-level hierarchical decentralized control) を資源配分による統合によって最適化している [13]，部分問題の制約条件を主問題の制約条件に逐次組み込んで全体的な最適化を達成する [11] などが報告されている．

$\boldsymbol{x}_i$が非負整数である場合の資源配分問題は，計算の複雑性の理論 (theory of complexity)[30] の立場から取りあげられることが多い [1, 21]．計算の複雑性の理論は，問題を解くための効率のよいアルゴリズムを開発すること，あるいはコンピュータによって実用的な計算時間で問題を解くことは困難であることを明らかにすることを目的とした理論である．本章で対象としている資源配分問題のように，目的関数が加算形（あるいは分離形）の場合では，動的計画法に基づいたアルゴリズムの効率がよいことが知られている．目的関数が加算形以外では，最大となる変数の値を最小にするmaximin形の目的関数の場合 [23] や，最小となる変数の値を最大にするminimax形の目的関数の場合 [28]，多期間資源配分問題 [27]，minimax形の目的関数を持つ多期間資源配分問題 [24] などが報告されている．このような計算の複雑性の理論に基づく資源配分問題は，本研究の主題とは異なるのでここでは取りあげないことにする．

3.3 線形モデルの最適化解析

3.3.1 マクロ・モデルの定式化

3.2節で取り上げた資源配分による統合は，いずれも与えられた資源のもとで部分問題を解き，そのときの資源に関する双対変数を計算して，主問題で行う資源の再配分に利用するものである．ところで，サブシステムが必要とする資源の量をあらかじめ計算することができれば，コーディネータの資源配分に関する意思決定を制約することができ，第1章で述べたようにサブシステムの自律性をより強く認めたものになるといえる．これを行うために，式 (3.10)~(3.12) で表わされるサブシステムの部分問題において，$\boldsymbol{b}_i$をパラメータとして取り扱えば，部分問題の目的関数と制約領域を$\boldsymbol{b}_i$で表すことができる．すなわち，$z_i(\boldsymbol{b}_i)$ と R_iを$\boldsymbol{b}_i$に関して陽的に表すことができ，主問題 (3.13)~(3.15) に反映することができる．もし$z_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)$ が線形関数であれば，部分問題は Gal によって提案されたマルチパラメトリック線形計画法 [10] を用いて容易に解くことができる．したがって，この場合はシステム全体の最適化を達成するための主問題の解法が問題となる．

そこで本研究では，サブシステムである工場の評価基準を工場利益とし，本部の評価基準の一つとして工場利益の総和から資源配分に関する費用を差し引いたものであるとする．もし工場利益を加算することができなければ，本部の評価基準は多基準となり，多目的計画法を適用することができる．ここでは簡単化のために工場利益の加算が可能であると仮定し，本部の資源配分問題を次のような線形モデルとして定式化する．

$$\text{Max. } Z = \sum_{i=1}^{N} z_i(\boldsymbol{X}_i) - \boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{b} \tag{3.18}$$

$$\text{sub. to } G\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{b}_0 \tag{3.19}$$

$$\boldsymbol{b} \geq 0 \tag{3.20}$$

ここで$\boldsymbol{b}_0 \in \mathrm{R}^{\ell}$, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1^{\top}, \cdots, \boldsymbol{b}_N^{\top})^{\top} \in \mathrm{R}^{N\ell}$, $\boldsymbol{C} \in \mathrm{R}^{N\ell}$: 資源配分に要する費用係数，$G$: 資源配分に関する $\ell \times (N\ell)$ 係数行列である．

本部によって配分される資源をパラメータとして制約条件式の右辺に置いた工場 $i(=1, \cdots, N)$ の生産計画問題を次のように定式化する．

$$\text{Max. } z_i(\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{c}_i^{\top} \boldsymbol{X}_i \tag{3.21}$$

$$\text{sub. to } F_i \boldsymbol{X}_i \leq \boldsymbol{d}_{1i} + E\boldsymbol{b}_i \tag{3.22}$$

$$\boldsymbol{X}_i \in \mathrm{S}_i = \{\boldsymbol{X}_i \mid H_i \boldsymbol{X}_i \leq \boldsymbol{d}_{2i}, \boldsymbol{X}_i \geq 0\} \tag{3.23}$$

ここで$\boldsymbol{X}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$: 工場 i が生産する製品の生産量，$\boldsymbol{c}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$: 製品の単位利益，$\boldsymbol{d}_{1i} \in \mathrm{R}^{p_{1i}}$: 最低限度必要とする資源量あるいは最大受け入れ可能量，$\boldsymbol{d}_{2i} \in \mathrm{R}^{p_{2i}}$: 製品需要量など工場 i 独自の右辺制約値，E: 配分される資源に関する $p_{1i} \times \ell$係数行列，F_i: 配分される資源の使用に関する $p_{1i} \times m_i$ 係数行列，H_i: 工場 i 独自の制約に関する $p_{2i} \times m_i$係数行列である．

工場 i の生産計画問題 (3.21)~(3.23) をパラメータ$\boldsymbol{b}_i$について解くと，生産計画$\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{b}_i)$ と評価基準である工場利益 $z_i(\boldsymbol{X}_i(\boldsymbol{b}_i)) = z_i(\boldsymbol{b}_i)$，および計画実施領域 $R_i(\boldsymbol{b}_i)$ を得ることができる．2.4 節で定義した工場の生産計画案は，これらによって作成され，それは次のようである．

$$\mathcal{P}_i^{(k_i)} = \{\boldsymbol{X}_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i), z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i), R_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)\}$$

2.4 節では，この生産計画案は K_i組存在するとした．次項ではこの K_i組の生産計画案を得る方法について述べる．

3.3.2 生産計画案の設定

工場 i の生産計画問題 (3.21)~(3.23) をマルチパラメトリック線形計画問題に書き換えるために，次のようにベクトルと行列を定義する．

$$A_i = \begin{pmatrix} F_i \\ \cdots \\ H_i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{d}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_{1i} \\ \cdots \\ \boldsymbol{d}_{2i} \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} E_i \\ \cdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

これらを用いて工場 $i(=1, \cdots, N)$ の生産計画問題を書き換えると，次のようになる．

$$\text{Max. } z_i(\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{c}_i^{\top} \boldsymbol{X}_i \tag{3.24}$$

$$\text{sub. to } A_i \boldsymbol{X}_i \leq \boldsymbol{d}_i + D_i \boldsymbol{b}_i \tag{3.25}$$

$$\boldsymbol{X}_i \geq 0 \tag{3.26}$$

これにマルチパラメトリック線形計画法を適用すれば，ベクトル・パラメータ$\boldsymbol{b}_i$に関する最適解と目的関数の最適値を得ることができる．そのために$\boldsymbol{b}_i$を任意の$\widehat{\boldsymbol{b}}_i \in \mathrm{R}^{\ell}$に固定し，そのときの最適解と最適値を$\widehat{\boldsymbol{b}}_i$について求めると，次のようになる．

$$\boldsymbol{X}_i(\widehat{\boldsymbol{b}}_i) = B_i^{-1}(\boldsymbol{d}_i + D_i \widehat{\boldsymbol{b}}_i) = \widehat{\boldsymbol{d}}_i + \widehat{D}_i \widehat{\boldsymbol{b}}_i \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned} z_i(\widehat{\boldsymbol{b}}_i) &= \boldsymbol{c}_{B_i}^{\top} B_i^{-1}(\boldsymbol{d}_i + D_i \widehat{\boldsymbol{b}}_i) \\ &= z_{\max_i} + \widehat{\boldsymbol{c}}_i^{\top} \widehat{\boldsymbol{b}}_i \end{aligned} \tag{3.28}$$

ここで B_iは A_iの最適基底行列であり，$\widehat{\boldsymbol{d}}_i = B_i^{-1}\boldsymbol{d}_i$，$\widehat{D}_i = B_i^{-1} D_i$，$z_{\max_i} = \boldsymbol{c}_{B_i}^{\top} B_i^{-1} \boldsymbol{d}_i$，$\widehat{\boldsymbol{c}}_i^{\top} = \boldsymbol{c}_{B_i}^{\top} B_i^{-1} D_i$である．また$\boldsymbol{c}_{B_i}$は B_iに対応する$\boldsymbol{c}_i$の部分ベクトルである．式 (3.27) が最適実行可能解であるためには，

$$\widehat{\boldsymbol{b}}_i \in R_i^{(0)} = \{\boldsymbol{b}_i \mid \widehat{\boldsymbol{d}}_i + \widehat{D}_i \boldsymbol{b}_i \geq 0\} \tag{3.29}$$

でなければならない．$\widehat{\boldsymbol{b}}_i$を$\boldsymbol{b}_i'$に変化させたとき$\boldsymbol{b}_i' \notin R_i^{(0)}$，すなわち不等式$\widehat{\boldsymbol{d}}_i + \widehat{D}_i \boldsymbol{b}_i \geq 0$の中のいくつかの式が成り立たなくなれば，式 (3.27) で与えられる基底解はもはや実行可能解にはならない．このとき，最適基底変数の中で負になるものが 1 つ以上存在し，非基底変数の中で正になるも

のが同じ数だけ存在する．前者が基底から出る変数の候補，後者が基底に入る変数の候補で，適当な規則を用いて候補の中の 1 つを選ぶことによって，新しい最適な基底解を得ることができる．このようにして，パラメータ$\boldsymbol{b}_i$を適当に変化させれば，いくつかの最適解と最適値，ならびにこれらが成り立つ$\boldsymbol{b}_i$の計画実施領域 R_iを得ることができる．これらが K_i組存在するものと仮定し，各組を k_iで表すことにする $(k_i = 1_i, \cdots, K_i)$．第 k_i番目の最適解と最適値，ならびに$\boldsymbol{b}_i$の計画実施領域を式 (3.27)~(3.29) の代わりに k_iを用いて，次のように表す．

$$\boldsymbol{X}_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i) = B_i^{(k_i)^{-1}}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + D_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i \tag{3.30}$$

$$\begin{aligned} z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i) &= \mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i) \\ &= z_{\max_i}^{(k_i)} + \mathbf{c}_i^{(k_i)^{\top}} \boldsymbol{b}_i \end{aligned} \tag{3.31}$$

$$R_i^{(k_i)} = \{\boldsymbol{b}_i \mid \boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + D_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i \geq 0\} \tag{3.32}$$

ここで，$\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} = B_i^{(k_i)^{-1}}\boldsymbol{d}_i$, $D_i^{(k_i)} = B_i^{(k_i)^{-1}} D_i$, $z_{\max_i}^{(k_i)} = \mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}} \boldsymbol{d}_i$, $\mathbf{c}_i^{(k_i)} = \mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}} D_i$, $k_i = 1_i, \cdots, K_i$である．

したがって，工場 i が本部に報告する生産計画案 $\mathcal{P}_i^{k_i}$は上式によって与えられる$\boldsymbol{X}_i^{(k_i)}$, $z_i^{(k_i)}$, $R_i^{(k_i)}$を用いて作成される．

マルチパラメトリック線形計画問題 (3.24)~(3.26) が最適解を持つような$\boldsymbol{b}_i$の全領域は，次のようである．

$$M_i = \bigcup_{k_i=1}^{K_i} R_i^{(k_i)} \tag{3.33}$$

この M_i上で定義される $z_i(\boldsymbol{b}_i)$ を $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ で表すことにすると，そのとき $R_i^{(k_i)}$, M_i, $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$, $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ に関して，次の定理が知られている [10]．

定理 3.1 (Gal[10]) $R_i^{(k_i)}$, M_iはともに閉凸多面体である． ▮

定理 3.2 (Gal[10]) $R_i^{(k_i)}$上の関数 $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ と M_i上で定義される関数 $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は，$R_i^{(k_i)}$上で線形である．さらに，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は M_i上で連続な凹関数である． ▮

以上のことから，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は M_i上のすべての点で微分可能でない次のような関数であることがわかる．

$$z_i^0(\boldsymbol{b}_i) = \begin{cases} z_i^{(1_i)}(\boldsymbol{b}_i) = z_{\max_i}^{(1_i)} + \mathbf{c}_i^{(1_i)^{\top}} \boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i \in R_i^{(1_i)} \\ z_i^{(2_i)}(\boldsymbol{b}_i) = z_{\max_i}^{(2_i)} + \mathbf{c}_i^{(2_i)^{\top}} \boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i \in R_i^{(2_i)} \\ \quad \vdots \qquad\qquad \vdots & \qquad \vdots \\ z_i^{(K_i)}(\boldsymbol{b}_i) = z_{\max_i}^{(K_i)} + \mathbf{c}_i^{(K_i)^{\top}} \boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i \in R_i^{(K_i)} \end{cases} \tag{3.34}$$

行列 D_iの要素が非負であるとき，これを $D_{ijq} \geq 0, j = 1, \cdots, \ell + p_i, q = 1, \cdots, \ell$で表すことにする．そのとき $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ と $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ に関して，次の定理が成り立つ．

定理 3.3 $D_{ijq} \geq 0$ のとき，$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ は$\boldsymbol{b}_i$について増加線形関数，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は増加凹関数である．

証明　式 (3.32) より

$$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i) = \mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i) = \mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}} \boldsymbol{d}_i + \mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}} D_i \boldsymbol{b}_i$$

ここで，$\mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}} \boldsymbol{d}_i = z_{\max_i}^{(k_i)}$, $\mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}} = \boldsymbol{u}_i^{(k_i)}$とすると上式は，

$$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i) = z_{\max_i}^{(k_i)} + \boldsymbol{u}_i^{(k_i)^{\top}} D_i \boldsymbol{b}_i$$

となる．ところで，$\boldsymbol{u}_i^{(k_i)}$は$\boldsymbol{b}_i \in R_i^{(k_i)}$に対する部分問題 (3.24)~(3.26) の双対変数である．したがって，最適解においては$\boldsymbol{u}_i^{(k_i)} \geq 0$であり，また $z_{\max_i}^{(k_i)}$は定数項であるので，$D_{ijq} \geq 0$ であれば $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ は増加線形関数である．このことと定理 3.2より，$z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は増加凹関数である． ▮

$B_i^{(k_i)}$と $R_i^{(k_i)}$に関して，以下のような定義を設定する．

定義 3.1 部分問題 (3.24)~(3.26) において，二つの基底行列 $B_i^{(1_i)}$と $B_i^{(2_i)}$を考える．

(i) $B_i^{(1_i)}$と $B_i^{(2_i)}$が同時に最適であるような $\bar{\boldsymbol{b}}_i \in M_i$が存在する．

(ii) $B_i^{(1_i)}$から $B_i^{(2_i)}$(または $B_i^{(2_i)}$から $B_i^{(1_i)}$) へ 1 回の双対ピボット操作で基底変換できる．

$B_i^{(1_i)}$と $B_i^{(2_i)}$が上の条件 (i)，(ii) を満たすならば，$B_i^{(1_i)}$と $B_i^{(2_i)}$は隣接しているという． ∎

定義 3.2 $B_i^{(1_i)}$と $B_i^{(2_i)}$が隣接した基底行列であれば，それぞれに対応する $R_i^{(1_i)}$と $R_i^{(2_i)}$を隣接領域と呼ぶ． ∎

3.3.3 本部計画の設定

工場は式 (3.33) によって本部の資源配分計画（これを本部計画と呼ぶことにする）を制約する．これと式 (3.34) を考慮して本部計画 (3.18)~(3.20) を次のように書き換える．

$$\text{Max. } Z^0(\boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{N} z_i^0(\boldsymbol{b}_i) - \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b} \tag{3.35}$$

$$\text{sub. to } G\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{b}_0 \tag{3.36}$$

$$\boldsymbol{b}_i \in M_i, i = 1, \cdots, N \tag{3.37}$$

この制約条件 (3.36) と (3.37) を次のように定義する．

$$\Omega = \{\boldsymbol{b} \mid G\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_i \in M_i, i = 1, \cdots, N\} \tag{3.38}$$

このとき $Z^0(\boldsymbol{b})$ とΩに関して次の定理が成り立つ．

定理 3.4 Ωは閉凸多面体である．また $Z^0(\boldsymbol{b})$ はΩ上で連続な増加凹関数である．

証明　定理 3.1より M_iは閉凸多面体であるので，Ωの定義式 (3.38) からΩは閉凸多面体である．次に定理 3.2と 3.3より $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は連続な増加凹関数である．したがって，式 (3.35) の第 1 項が$\sum_{i=1}^{N} z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ であり第 2 項が線形であることより，$Z^0(\boldsymbol{b})$ もまた連続な増加凹関数となる． ∎

各工場問題の計画実施領域 $R_i^{(k_i)}$の中から$\cap_{i=1}^{N} R_i^{(k_i)} \neq \phi$となるような任意の領域を選び，それを $R_i^{(\hat{k}_i)}$とする．式 (3.36) と$\boldsymbol{b} \geq 0$を満たすようなすべての領域の組合せが J組存在するものとし，各組を$\omega_\xi, \xi = 1, \cdots, J$, $(1 \leq J \leq \prod_{i=1}^{N} K_i)$ で表わし，ω_ξを構成する領域の添字集合をΛ_ξとする．すなわち

$$\omega_\xi = \bigcap_{i=1}^{N} R_i^{(\hat{k}_i)} \bigcap \{\boldsymbol{b} \mid G\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b} \geq 0\}, \hat{k}_i \in \Lambda_\xi, \xi = 1, \cdots, J \tag{3.39}$$

明らかに，

$$\bigcup_{\xi=1}^{J} \omega_\xi = \Omega \tag{3.40}$$

である．ω_ξ上で定義される本部問題の目的関数を $Z_\xi(\boldsymbol{b})$ とすれば，これは次のようになる．

$$\begin{aligned} Z_\xi(\boldsymbol{b}) &= \sum_{i=1}^{N} z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i) - \boldsymbol{C}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b} \\ &= \sum_{i=1}^{N}(z_{\max_i}^{(\hat{k}_i)} + \boldsymbol{c}_i^{(\hat{k}_i)^{\mathsf{T}}}\boldsymbol{b}_i) - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{C}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} z_{\max_i}^{(\hat{k}_i)} + \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{c}_i^{(\hat{k}_i)} - \boldsymbol{C}_i)^{\mathsf{T}}\boldsymbol{b}_i \\ &= Z_{\max}^{(\xi)} + \boldsymbol{C}^{(\xi)^{\mathsf{T}}}\boldsymbol{b}, \hat{k}_i \in \Lambda_\xi \end{aligned} \tag{3.41}$$

ここで，$Z_{\max}^{(\xi)} = \sum_{i=1}^{N} z_{\max_i}^{(\hat{k}_i)}$，$\boldsymbol{C}^{(\xi)} = ((\boldsymbol{c}_1^{(\hat{k}_1)} - \boldsymbol{C}_1)^{\mathsf{T}}, \cdots, (\boldsymbol{c}_N^{(\hat{k}_N)} - \boldsymbol{C}_N)^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$, $\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1^{\mathsf{T}}, \cdots, \boldsymbol{b}_N^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$である．

ω_ξと Z_ξに関して次の定理が成り立つ．

定理 3.5 ω_ξは閉凸多面体である．また $Z_\xi(\boldsymbol{b})$ は$\boldsymbol{b} \in \omega_\xi$上で増加線形関数である．

証明　定理 3.1より $R_i^{(\hat{k}_i)}$は閉凸多面体であるので，$\hat{k}_i \in \Lambda_\xi$なる N個の $R_i^{(\hat{k}_i)}$の共通部分も閉凸多面体となる．したがって，式 (3.41) で定義されるω_ξも閉凸多面体となる．次に，定理 3.3より $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ が増加線形関数であるので，式 (3.41) より $Z_\xi(\boldsymbol{b})$ はω_ξ上で増加線形関数である．∎

Ω上で定義される $Z_\xi(\boldsymbol{b})$ を $Z^0(\boldsymbol{b})$ とすれば，定理 3.4と定理 3.5から，これはΩ上のすべての点で微分可能でない関数であることがわかる．すなわち

$$Z^0(\boldsymbol{b}) = \begin{cases} Z_1(\boldsymbol{b}) = Z_{\max}^{(1)} + \boldsymbol{C}^{(1)^\top}\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{b} \in \omega_1 \\ Z_2(\boldsymbol{b}) = Z_{\max}^{(2)} + \boldsymbol{C}^{(2)^\top}\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{b} \in \omega_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \qquad\vdots \\ Z_J(\boldsymbol{b}) = Z_{\max}^{(J)} + \boldsymbol{C}^{(J)^\top}\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{b} \in \omega_J \end{cases} \tag{3.42}$$

ω_ξについて次の定義を置く．

定義 3.3 $R_i^{(1_i)}, 1_i \in \Lambda_{\xi_1}$と $R_i^{(2_i)}, 2_i \in \Lambda_{\xi_2}$をそれぞれ要素とする$\omega_{\xi_1}$と$\omega_{\xi_2}$を考える．もし $R_i^{(1_i)}$と $R_i^{(2_i)}$が隣接領域であれば，ω_{ξ_1}とω_{ξ_2}も隣接領域と呼ぶ．∎

3.3.4 本部計画の最適化

前項の展開より本部計画は，次のようになる．

$$\text{Max. } Z^0(\boldsymbol{b}) \tag{3.43}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{b}_i \in \Omega, i = 1, \cdots, N \tag{3.44}$$

ところで，$Z^0(\boldsymbol{b})$ と $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ をそれぞれ

$$Z^0(\boldsymbol{b}) = -\infty, \text{ if } \boldsymbol{b} \notin \Omega$$

$$z_i^0(\boldsymbol{b}_i) = -\infty, \text{ if } \boldsymbol{b}_i \notin M_i, i = 1, \cdots, N$$

として，目的関数の定義域を R^ℓ全体に広げる．これは，

$$\text{dom } Z^0(\boldsymbol{b}) = \Omega$$

$$\text{dom } z_i^0(\boldsymbol{b}_i) = M_i, i = 1, \cdots, N$$

を意味する．このようにすることによって，$Z^0(\boldsymbol{b})$ は式 (3.42) を考慮して次のような min 関数に置き換えることができる．

$$Z^+(\boldsymbol{b}) = \min_\xi Z_\xi(\boldsymbol{b}) \tag{3.45}$$

これを用いて本部計画 (3.43)，(3.44) を書き換えると次のようになる．

$$\text{Max. } Z^+(\boldsymbol{b}) = \min_\xi Z_\xi(\boldsymbol{b}) \tag{3.46}$$

$$\text{sub. to } \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i \leq \boldsymbol{b}_0 \tag{3.47}$$

$$\boldsymbol{b}_i \geq 0 \tag{3.48}$$

この本部計画の最適解を得るために，次のような Lagrange 関数を設定する．

$$L_0(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{u}_0) \equiv Z^+(\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{u}_0^\top(\sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i - \boldsymbol{b}_0)$$

ここで$\boldsymbol{u}_0 = (u_{01}, \cdots, u_{0\ell})^\top$である．最適性の必要条件は，微分可能関数に関する Kuhn-Tucker 条件に対応する次の定理によって与えることができる．

定理 3.6 (福島 [3]) Slater の制約想定を満たす$\boldsymbol{b}_i, i = 1, \cdots, N$が存在すると仮定する．そのとき，$\hat{\boldsymbol{b}}_i$が本部問題 (3.46)~(3.48) の大域的最適解で

あるための必要十分条件は，

$$\partial L_0(\widehat{\boldsymbol{b}}, \widehat{\boldsymbol{u}}_0) = \partial Z^+(\widehat{\boldsymbol{b}}) + E^\top \widehat{\boldsymbol{u}}_0 \ni 0 \tag{3.49}$$

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_0 \geq 0 \tag{3.50}$$

$$\sum_{i=1}^{N} \widehat{\boldsymbol{b}}_i \leq \boldsymbol{b}_0 \tag{3.51}$$

$$\widehat{\boldsymbol{u}}_0^\top (\sum_{i=1}^{N} \widehat{\boldsymbol{b}}_i - \boldsymbol{b}_0) = 0 \tag{3.52}$$

を満たす Lagrange 乗数 $\widehat{\boldsymbol{u}}_0 \in \mathrm{R}^\ell$が存在することである．ここで，$\partial L_0$，$\partial Z^+$は劣微分，$E$は式 (3.44) の$\sum$に対応する行列である． ∎

$Z^+(\boldsymbol{b})$ が連続な微分可能関数であれば，上の定理は明らかに Kuhn-Tucker 条件と一致する．

必要条件 (3.49)~(3.52) を用いて最適解を求めるには，Z^+の劣微分を知る必要がある．式 (3.45) で定義した min 関数の劣微分に関して次の定理がある．

定理 3.7 (福島 [3]) 式 (3.45) で定義された凹関数について $\mathrm{intdom}\, Z^+(\boldsymbol{b}) \neq \phi$とすれば$\boldsymbol{b} \in \mathrm{intdom} Z^+(\boldsymbol{b})$ に対して，

$$\partial Z^+(\boldsymbol{b}) \subset \mathrm{Co}\{\partial Z_\xi(\boldsymbol{b}) \mid \xi \in I(\boldsymbol{b})\}$$

が成り立つ．ここで $I(\boldsymbol{b}) = \{\xi \mid Z^+(\boldsymbol{b}) = Z_\xi(\boldsymbol{b}), \xi = 1, \cdots, N\}$ である．

∎

したがって，式 (3.41) より

$$\partial Z_\xi(\boldsymbol{b}) = \mathrm{Co}\{\partial z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i), \hat{k}_i \in \Lambda_\xi\} \tag{3.53}$$

であるので，$\boldsymbol{b}_i \in \omega_\xi$に関する $z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣微分がわかれば，$\partial Z^+(\boldsymbol{b})$ を求めることができる．そのために，$z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b})$ の劣勾配を求める必要がある．点$\boldsymbol{b}_i^1 \in \omega_\xi$における $z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣勾配は，任意の$\boldsymbol{b}_i^2 \in \omega_\xi$に対して，

$$z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i^2) - z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i^1) \leq \boldsymbol{\rho}_i(\boldsymbol{b}_i^2 - \boldsymbol{b}_i^1) \tag{3.54}$$

を満たす$\boldsymbol{\rho}_i \in \mathrm{R}^\ell$である．点$\boldsymbol{b}_i^1$において，上式を満足する$\boldsymbol{\rho}_i$全体の集合が $z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣微分$\partial z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ である．

劣勾配$\boldsymbol{\rho}_i$と工場問題 (3.24)~(3.26) の双対変数$\boldsymbol{u}_i$との間には，次のような関係が存在する．

定理 3.8 工場問題 (3.24)~(3.26) の Lagrange 関数を

$$L_i(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{u}_i) = \boldsymbol{c}_i^\top \boldsymbol{X}_i + \boldsymbol{u}_i^\top \{A_i \boldsymbol{X}_i - (\boldsymbol{d}_i + D_i \boldsymbol{b}_i)\}$$

とする．$\boldsymbol{X}_i^*$を工場問題の解とすると，$-\boldsymbol{u}_i^{*\top} D_i$が$\boldsymbol{b}_i$における劣勾配，すなわち$-\boldsymbol{u}_i^{*\top} D_i \in \partial z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{X}_i^*, \boldsymbol{u}_i^*)$ が L_i の鞍点条件

$$L_i(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{u}_i^*) \leq L_i(\boldsymbol{X}_i^*, \boldsymbol{u}_i^*) \leq L_i(\boldsymbol{X}_i^*, \boldsymbol{u}_i)$$

$$\boldsymbol{X}_i \in \mathrm{R}^{m_i}, \boldsymbol{u}_i \geq 0 \tag{3.55}$$

を満たすことである．

証明　$\boldsymbol{d}_i = 0$，$D_i = I$のとき，$-\boldsymbol{u}_i^*$が$\boldsymbol{b}_i$における劣勾配となることが Lasdon[26] によって証明されている．この定理の場合についても同様の方法で証明できる．以下の証明では添字 i, k_iを省略する．

$\Leftarrow$ 式 (3.55) より

$$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X} - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b}) \leq \boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{X}^* + \boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b})$$

$\boldsymbol{X}^*$が工場問題の解であれば，式 (3.27) より$\boldsymbol{X}^* = B^{-1}(\boldsymbol{d} + D\boldsymbol{b})$で$\boldsymbol{c}^\top \boldsymbol{X}^* = z(\boldsymbol{b})$，そのとき Kuhn-Tucker 条件より$\boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b}) = 0$．したがって上式は次のようになる．

$$z(\boldsymbol{b}) \geq \mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X} - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b})$$

$A\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{d} + D\boldsymbol{b}'$となるような$\boldsymbol{b}' \in \mathrm{R}^{\ell}$を選ぶ．この制約条件を満たす$\boldsymbol{X}$に対して，上式の $A\boldsymbol{X}$を$\boldsymbol{\beta}$で置き換えることができ，次のようになる．

$$z(\boldsymbol{b}) \geq \mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}^{*\top}(\boldsymbol{\beta} - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b})$$

$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{d} + D\boldsymbol{b}'$であるから上式は，

$$z(\boldsymbol{b}) \geq \mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}^{*\top}(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b})$$

となる．$A\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{\beta}$なる$\boldsymbol{X}$に関して上式の sup. をとれば，次のようになる．

$$z(\boldsymbol{b}) \geq z(\boldsymbol{b}') + \boldsymbol{u}^{*\top}D(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b})$$

$$z(\boldsymbol{b}') - z(\boldsymbol{b}) \leq -\boldsymbol{u}^{*\top}D(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b}) \tag{3.56}$$

$A\boldsymbol{X} \leq \boldsymbol{\beta}$となるような$\boldsymbol{X}$が存在しなければ $z(\boldsymbol{b}') = -\infty$ であるので，式 (3.56) はすべての$\boldsymbol{b}' \in \mathrm{R}^{\ell}$に対して成り立つ．これは$-\boldsymbol{u}^{*\top}D$が$\partial z(\boldsymbol{b})$ の要素であるための定義式である．

$\Rightarrow$　すべての$\boldsymbol{b}' \in \mathrm{R}^{\ell}$に対して式 (3.56) が成り立つと仮定する．$\boldsymbol{b}'$を

$$\boldsymbol{d} + D\boldsymbol{b}' = A\boldsymbol{X}^* \tag{3.57}$$

となるように選べば，これは

$$z(\boldsymbol{b}) = \mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X}^* = z(\boldsymbol{b}') \tag{3.58}$$

を意味する．式 (3.57)，(3.58) を式 (3.56) に代入すれば，

$$\boldsymbol{u}^{*\top}(D\boldsymbol{b}' - D\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b}) \leq 0$$

を得る．$\boldsymbol{u}^* \geq 0$かつ $A\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b} \leq 0$であるので，

$$\boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b}) = 0 \tag{3.59}$$

および

$$A\boldsymbol{X}^* \leq \boldsymbol{d} + D\boldsymbol{b}$$

となる．これは $(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*)$ が L の鞍点であるための必要十分条件のうちの二つである．残りの一つを示すために，$\mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X}^* = z(\boldsymbol{b})$ と式 (3.59) を式 (3.56) に代入すると，

$$\mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X}^* + \boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b}) \geq z(\boldsymbol{b}') + \boldsymbol{u}^{*\top}D(\boldsymbol{b}' - \boldsymbol{b}) \tag{3.60}$$

を得る．任意の$\boldsymbol{X} \in \mathrm{R}^m$を選んで，

$$\boldsymbol{d} + D\boldsymbol{b}' = A\boldsymbol{X} \tag{3.61}$$

とすると，$\boldsymbol{X}$はこのときの工場問題に対して実行可能であるので，

$$z(\boldsymbol{b}') \geq \mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X} \tag{3.62}$$

である．式 (3.60) に式 (3.61)，(3.62) を代入すると，

$$\mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X}^* + \boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X}^* - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b}) \geq \mathbf{c}^{\top}\boldsymbol{X} + \boldsymbol{u}^{*\top}(A\boldsymbol{X} - \boldsymbol{d} - D\boldsymbol{b})$$

となる．$\boldsymbol{X}$は任意であるので，上式は $L(\boldsymbol{X}^*, \boldsymbol{u}^*) \geq L(\boldsymbol{X}, \boldsymbol{u}^*)$ を意味する．∎

$\bar{\boldsymbol{b}}_i \in R^{(\hat{k}_i)}, \hat{k}_i \in \Lambda_{\ell}$に対して，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$でアクティブになる制約式の添字集合を

$$I_i^{(\hat{k}_i)} = \{j \mid d_{ij}^{(\hat{k}_i)} + \sum_{q=1}^{\ell} D_{ijq}^{(\hat{k}_i)}\bar{b}_{iq} = 0, j = 1, \cdots, \ell + p_i\} \tag{3.63}$$

とすると，$-\sum_{q=1}^{\ell} D_{ijq}^{(\hat{k}_i)}\bar{b}_{iq} = d_{ij}^{(\hat{k}_i)}, j \in I_i^{(\hat{k}_i)}$を境界とするすべての隣接領域に関する双対変数のベクトルで構成される凸多面錐が$\bar{\boldsymbol{b}}_i$における劣勾配の集合，すなわち劣微分となる．

以上の展開から，本部問題 (3.46)~(3.48) を最適にするためには，工場問題 (3.24)~(3.26) の双対変数を求めればよいことが明らかになった．工場問題の双対変数$\boldsymbol{u}_i$と$\boldsymbol{u}_i^{\top}D_i$は工場問題を解く際に用いるシンプレックス表内にシンプレックス乗数として現われる．いま$\hat{k}_i$番目のシンプレックス表が次のようであるとする．

$B_i^{(\hat{k}_i)}$	$N_i^{(\hat{k}_i)}$	$\boldsymbol{d}_i^{(\hat{k}_i)}$	$D_i^{(\hat{k}_i)}$
$\boldsymbol{c}_i^{\top}B_i^{(\hat{k}_i)^{-1}}$ $(=\boldsymbol{u}_i^{(\hat{k}_i)})$	0	$z_{max_i}^{(\hat{k}_i)}$	$\boldsymbol{c}_{B_i}^{\top}B_i^{(\hat{k}_i)^{-1}}D_i$ $(=\boldsymbol{u}_i^{(\hat{k}_i)^{\top}}D_i)$

ここで $N_i^{(\hat{k}_i)}$は非基底行列である．もし本部問題 (3.46)~(3.48) の解$\bar{\boldsymbol{b}}_i$が制約条件の内点であれば，$\bar{\boldsymbol{u}}_0=0$で最適条件式 (3.49) は$\partial Z^+(\bar{\boldsymbol{b}})\ni 0$となり，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$がこの条件を満たせば最適解である．これは上のシンプレックス表の中の$\boldsymbol{c}_{B_i}^{\top}B_i^{(\hat{k}_i)^{-1}}D_i$が 0 に等しくなったときに満たされる．

3.3.5 アルゴリズム

前項までの展開から，最適解を得るためのアルゴリズムは次のようになる．

ステップ1：$\sum_{i=1}^{N}\hat{\boldsymbol{b}}_i\leq\boldsymbol{b}_0$，$\hat{\boldsymbol{b}}_i\geq 0$を満たす任意の$\hat{\boldsymbol{b}}_i$を用いて工場問題 (3.24)~(3.26) を解く．このときの計画実施領域 $R_i^{(k_i)}$を求める．$k_i=1,i=1,\cdots,N,\xi=1$とする．

ステップ2：ω_ξ，$Z_\xi(\boldsymbol{b})$ を求め，本部問題を解く．得られた最適解を$\bar{\boldsymbol{b}}_i$とする．本部問題が実行不可能であれば，計算を終了する．

ステップ3：ω_ξの境界 (boundary) を bdω_ξで表す．$\bar{\boldsymbol{b}}_i\in$ bdω_ξとなる工場問題について，$I_i^{(k_i)},k_i\in\Lambda_\xi$を求め，$R_i^{k_i}\ni\bar{\boldsymbol{b}}_i$の隣接領域を求める．すべての隣接領域について，$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$の劣勾配を計算する．もし$\boldsymbol{\rho}_i=0,i=1,\cdots,N$であれば最適解が得られており，計算を終了する．そうでなければステップ4へいく．

ステップ4：最も大きな$\boldsymbol{\rho}_i$を持つ隣接領域 $R_i^{(k_i+1)}$を求める．本部問題の制約条件に$-D_i^{(k_i+1)}\boldsymbol{b}_i\leq\boldsymbol{d}_i^{(k_i+1)}$，$k_i+1\in\Lambda_{\xi+1}$を加え，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$が解となるようにシンプレックス表を変換する．$\xi\leftarrow\xi+1$，$k_i\leftarrow k_i+1$としてステップ2へ戻る．

上のアルゴリズムでは，$Z^0(\boldsymbol{b})$ は連続な増加凹関数であるので，$Z^0(\boldsymbol{b})$が増加する方向にω_ξをたどっていけば，必ず最適解に到達することができる．そのためにステップ2では，本部問題としてω_ξに関する次の問題を解けばよい．

$$
\begin{aligned}
&\text{Max. } Z_\xi(\boldsymbol{b})\\
&\text{sub. to } \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{b}_i\leq\boldsymbol{b}_0\\
&\qquad -D_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i\leq\boldsymbol{d}_i^{(k_i)},k_i\in\Lambda_\xi,i=1,\cdots,N\\
&\qquad\qquad \boldsymbol{b}_i\geq 0,i=1,\cdots N
\end{aligned}
$$

ステップ3における計算の停止基準は，$\boldsymbol{\rho}_i=0$かあるいは隣接領域が存在しないことである．また，隣接領域の $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$の劣勾配は，双対ピボット操作を一回行うことによってシンプレックス乗数を求めればよいので，新たに$R_i^{(k_i)}$を求める必要はない．ステップ4で新しい制約式$-D_i^{(k_i+1)}\boldsymbol{b}_i\leq\boldsymbol{d}_i^{(k_i+1)}$を追加し，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$が解となるように掃き出し法でシンプレックス表を変換すると，ω_ξを構成している$-D_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i\leq\boldsymbol{d}_i^{(k_i)}$は冗長制約としてシンプレックス表上に現われるので容易に取り除くことができる．また，境界となる制約式は不等号の向きを逆にすればよい．

工場問題は，一度最適解を得ると一回の双対ピボット操作によって次々と新しい隣接領域を求めることができる．しかしながら，本部問題は繰

り返しのたびごとに新しい線形計画問題を解く必要がある．その際，ω_ξの最適解を$\omega_{\xi+1}$の初期実行可能解として利用すれば，計算量を節約することができる．

3.3.6 数値計算例

前節までに提案した方法の妥当性と有効性を検討するために，次のようなマクロ・モデルを考える．

(1) 工場数を $2(N=2)$ とする $(i=1,2)$．

(2) 本部が工場に配分する資源は原材料と労働量の 2 種類であるとし，それぞれ記号$\boldsymbol{b}_1=(b_{11},b_{21})^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{b}_2=(b_{12},b_{22})^{\mathsf{T}}$で表す $(\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1^{\mathsf{T}},\boldsymbol{b}_2^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}=((b_{11},b_{21})^{\mathsf{T}},(b_{12},b_{22})^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}})$．

(3) 各工場は独自の生産設備を用いてそれぞれ 2 種類の製品 $\mathrm{P}_{ij}, j=1,2\ (n_1=n_2=2), i=1,2$ を生産しているものとする．その生産量を $X_{ij}, j=1,2, i=1,2$ とする．

(4) 本部は各工場が求めた利益の総和から資源の配分に要する費用を差し引いたものを評価基準とし，これを最大にするように資源の配分を行う．

計算に必要なデータを表 3.1 に示す．また，本部が資源配分に要する費用は，原材料では 3 千円/kg，労働量では 5 千円/man-h であり，配分可能な原材料と労働力は，それぞれ 5,000 kg と 13,300 man-h であるとする．各工場の生産設備利用可能時間は，工場 1 では 4,000 machine-h，工場 2 では 2,400 machine-h であるとする．

原材料と労働量の初期配分量をそれぞれ$\hat{b}_{11}=1,000$，$\hat{b}_{21}=600$，$\hat{b}_{12}=2,100$，$\hat{b}_{22}=1,800$ としたとき，工場問題は次のようになる．

<工場 1>

$$\text{Max. } z_1=4X_{11}+9X_{12}$$

表 3.1 数値計算用データ

工場 i	製品 P_{ij}	販売価格 (万円/pc)	原材料 (kg/pc)	労働量 (man-h/pc)	設備能力 (machine-h/pc)
1	P_{11}	4	2	7	16
	P_{12}	9	5	6	5
2	P_{21}	6	3	4	8
	P_{22}	5	2	7	3

$$\begin{aligned}\text{sub. to }\ & 2X_{11}+5X_{12}\le 1,000+b_{11}\\ & 7X_{11}+6X_{12}\le 2,100 \qquad +b_{12}\\ & 16X_{11}+5X_{12}\le 4,000\\ & X_{11},X_{12}\ge 0\end{aligned}$$

<工場 2>

$$\text{Max. } z_2=6X_{21}+5X_{22}$$

$$\begin{aligned}\text{sub. to }\ & 3X_{21}+2X_{22}\le \ \ 600+b_{21}\\ & 4X_{21}+7X_{22}\le 1,800 \qquad +b_{22}\\ & 8X_{21}+3X_{22}\le 2,400\\ & X_{21},X_{22}\ge 0\end{aligned}$$

<本部>

$$\text{Max. } Z=z_1(X_{11}^*,X_{12}^*)+z_2(X_{21}^*,X_{22}^*)$$

$$
\begin{aligned}
&-0.3(b_{11}+b_{21})-0.5(b_{12}+b_{22})\\
\text{sub. to}\quad &(1,000+b_{11})+\ \ (600+b_{21})\le\ \ 5,000\\
&(2,100+b_{12})+(1,800+b_{22})\le 13,300\\
&\qquad\qquad b_{11},b_{12},b_{21},b_{22}\ge 0
\end{aligned}
$$

各工場問題をマルチパラメトリック線形計画法で解くと，表 3.2 と表 3.3 に示すシンプレックス表を得た．前項で提案したアルゴリズムをこの数値計算例に適用すると，以下のようになる．

ステップ 1：工場 1 と工場 2 が本部に報告する生産計画案は，それぞれ次のようになる．

工場 1 の生産計画案 $\mathcal{P}_1^{(1_1)}$:

$$
\begin{aligned}
\text{生産計画：} X_{11}^{(1_1)} &= \ \ 195.65-0.26b_{11}+0.22b_{12}\\
X_{12}^{(1_1)} &= \ \ 121.74+0.30b_{11}-0.09b_{12}\\
\text{計画利益：}\ z_1^{(1_1)} &= 1,878.26+1.70b_{11}-0.09b_{12}\\
\text{計画実施領域：} R_1^{(1_1)} &= \{(b_{11},b_{12})\mid -0.30b_{11}+0.09b_{12}\le 121.74,\\
&\qquad 0.26b_{11}-0.22b_{12}\le 195.65,\\
&\qquad -2.65b_{11}+3.04b_{12}\le 260.87\}
\end{aligned}
$$

工場 2 の生産計画案 $\mathcal{P}_2^{(1_2)}$:

$$
\begin{aligned}
\text{生産計画：} X_{21}^{(1_2)} &= \ \ 46.15+0.54b_{21}-0.15b_{22}\\
X_{22}^{(1_2)} &= \ \ 230.77-0.31b_{21}+0.23b_{22}\\
\text{計画利益：}\ z_2^{(1_2)} &= 1,615.37+1.69b_{21}+0.23b_{22}\\
\text{計画実施領域：} R_2^{(1_2)} &= \{(b_{21},b_{22})\mid -0.54b_{21}+0.15b_{22}\le\ \ 46.15,\\
&\qquad 0.31b_{21}-0.23b_{22}\le\ \ 230.77,\\
&\qquad 3.38b_{21}-0.54b_{22}\le 1,338.46\}
\end{aligned}
$$

表 3.2 工場 1 のシンプレックス表

基底	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}	x_{15}	z_1	b_{11}	b_{12}
x_{13}	2.00	5.00	1.00	0.00	0.00	1000.00	1.00	0.00
x_{14}	7.00	6.00	0.00	1.00	0.00	2100.00	0.00	1.00
x_{15}	16.00	5.00	0.00	0.00	1.00	4000.00	0.00	0.00
	4.00	9.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
x_{12}	0.00	1.00	0.30	−0.09	0.00	121.74	0.30	−0.09
x_{11}	1.00	0.00	−0.26	0.22	0.00	195.65	−0.26	0.22
x_{15}	0.00	0.00	2.65	−3.04	1.00	260.87	2.65	−3.04
	0.00	0.00	1.70	0.09	0.00	1878.26	1.70	0.09
x_{12}	1.17	1.00	0.00	0.17	0.00	350.00	0.00	0.17
x_{13}	−3.83	0.00	1.00	−0.83	0.00	−750.00	1.00	−0.83
x_{15}	10.17	0.00	0.00	−0.83	1.00	2250.00	0.00	−0.83
	6.50	0.00	0.00	1.50	0.00	3150.00	0.00	1.50
x_{12}	0.00	1.00	0.23	0.00	−0.03	114.29	0.23	0.00
x_{11}	1.00	0.00	−0.07	0.00	0.07	214.29	−0.07	0.00
x_{14}	0.00	0.00	−0.87	1.00	−0.33	−85.71	−0.87	1.00
	0.00	0.00	1.77	0.00	0.03	1885.71	1.77	0.00
x_{12}	3.20	1.00	0.00	0.00	0.20	800.00	0.00	0.00
x_{13}	−14.00	0.00	1.00	0.00	−1.00	−3000.00	1.00	0.00
x_{14}	−12.20	0.00	0.00	1.00	−1.20	−2700.00	0.00	1.00
	24.80	0.00	0.00	0.00	1.80	7200.00	0.00	0.00

表 3.3 工場 2 のシンプレックス表

基底	x_{21}	x_{22}	x_{23}	x_{24}	x_{25}	z_2	b_{21}	b_{22}
x_{23}	3.00	2.00	1.00	0.00	0.00	600.00	1.00	0.00
x_{24}	4.00	7.00	0.00	1.00	0.00	1800.00	0.00	0.00
x_{25}	8.00	3.00	0.00	0.00	1.00	2400.00	0.00	0.00
	6.00	5.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
x_{21}	1.00	0.00	0.54	−0.15	0.00	46.15	0.54	−0.15
x_{22}	0.00	1.00	−0.31	0.23	0.00	230.77	−0.31	0.23
x_{25}	0.00	0.00	−3.38	0.54	1.00	1338.46	−3.38	0.54
	0.00	0.00	1.69	0.23	0.00	1615.37	1.69	0.23
x_{21}	1.00	0.00	0.00	−0.07	0.16	259.09	0.00	−0.07
x_{22}	0.00	1.00	0.00	0.18	−0.09	109.09	0.00	0.18
x_{23}	0.00	0.00	1.00	−0.16	−0.30	−395.45	1.00	−0.16
	0.00	0.00	0.00	0.50	0.50	2100.00	0.00	0.50
x_{24}	−6.50	0.00	−3.50	1.00	0.00	−300.00	−3.50	1.00
x_{22}	1.50	1.00	0.50	0.00	0.00	300.00	0.50	0.00
x_{25}	3.50	0.00	−1.50	0.00	1.00	1500.00	−1.50	0.00
	1.50	0.00	2.50	0.00	0.00	1500.00	2.50	0.00
x_{24}	−14.67	0.00	0.00	1.00	−2.33	−3800.00	0.00	1.00
x_{22}	2.67	1.00	0.00	0.00	0.33	800.00	0.00	0.00
x_{23}	−2.33	0.00	1.00	0.00	−0.67	−1000.00	1.00	0.00
	7.33	0.00	0.00	0.00	1.67	4000.00	−2.50	0.00

ステップ 2 ：$\xi = 1$．

計画実施領域の組合せω_1は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\omega_1 = \{(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) \mid \quad & b_{11} + \quad b_{21} \le 3,400.00 \\
& b_{12} + \quad b_{22} \le 9,400.00 \\
& -0.30b_{11} + 0.09b_{12} \le \ 121.74 \\
& 0.26b_{11} - 0.22b_{12} \le \ 195.65 \\
& -2.65b_{11} + 3.04b_{12} \le \ 260.87 \\
& -0.54b_{21} + 0.15b_{22} \le \ 46.15 \\
& 0.31b_{21} - 0.23b_{22} \le \ 230.77 \\
& 3.38b_{21} - 0.54b_{22} \le 1,338.46\}
\end{aligned}
$$

このときの各工場の工場利益はそれぞれ

$$
\begin{aligned}
z_1^{(1_1)} &= 1,878.26 + 1.70b_{11} - 0.09b_{12} \\
z_2^{(1_2)} &= 1,615.37 + 1.69b_{21} + 0.23b_{22}
\end{aligned}
$$

である．これより本部の目的関数を求めると

$$
Z_1 = 3,493.63 + 1.46b_{11} - 0.59b_{12} + 1.39b_{21} - 0.27b_{22}
$$

となる．したがって，本部問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } & Z_1(\boldsymbol{b}) = 3,493.63 + 1.46b_{11} - 0.59b_{12} + 1.39b_{21} - 0.27b_{22} \\
\text{sub. to } & b_{11} + \quad b_{21} \le 3,400.00 \\
& b_{12} + \quad b_{22} \le 9,400.00 \\
& -0.30b_{11} + 0.09b_{12} \le \ 121.74 \\
& 0.26b_{11} - 0.22b_{12} \le \ 195.65 \\
& -2.65b_{11} + 3.04b_{12} \le \ 260.87 \\
& -0.54b_{21} + 0.15b_{22} \le \ 46.15 \\
& 0.31b_{21} - 0.23b_{22} \le \ 230.77 \\
& 3.38b_{21} - 0.54b_{22} \le 1,338.46
\end{aligned}
$$

$$b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \geq 0$$

これを解くと$\bar{b}_{11} = 3,004.00$，$\bar{b}_{12} = 2,660.87$，$\bar{b}_{21} = 395.99$，$\bar{b}_{22} = 0.00$，$Z_1^*(\bar{b}_i) = 6,679.76$を得る．

ステップ3：ω_1に隣接する$R_i^{(2_i)}$を求める．そのためにステップ2の本部問題の制約条件で等号で成り立つ制約式を探すと，

$$\begin{aligned} 0.26\bar{b}_{11} - 0.22\bar{b}_{12} &= \quad 195.65 \\ 3.38\bar{b}_{21} - 0.54\bar{b}_{22} &= 1,338.46 \end{aligned}$$

であるので，$I_1^{(1_1)} = \{2\}$，$I_2^{(1_2)} = \{3\}$となる．シンプレックス表3.2より隣接領域における境界$0.26\bar{b}_{11} - 0.22\bar{b}_{12} = 195.65$上での$z_1^{(1_1)}$の劣勾配は$\rho_{11} = 0$，$\rho_{12} = 1.50$，シンプレックス表3.3より隣接領域における境界$3.38\bar{b}_{21} - 0.54\bar{b}_{22} = 1,338.46$上での$z_2^{(1_2)}$の劣勾配は$\rho_{21} = 0.0$，$\rho_{22} = 0.50$である．したがって，本部目的関数を改良できる可能性があるのでステップ4へいく．

ステップ4：ω_1に隣接する各工場の計画実施領域と生産計画案は次のようである．

工場1の生産計画案$\mathcal{P}_1^{(2_1)}$:

$$\begin{aligned} \text{生産計画}：X_{11}^{(2_1)} &= \quad 0.00 \\ X_{12}^{(2_1)} &= 350.00 + 0.17b_{12} \end{aligned}$$

計画利益：$z_1^{(2_1)} = 30,150.00 + 1.50b_{12}$

計画実施領域：$R_1^{(2_1)} = \{(b_{11}, b_{12}) \mid 6.00b_{11} - 5.00b_{12} \leq 4,500.00,$
$b_{12} \geq 2,700.00\}$

工場2の生産計画案$\mathcal{P}_2^{(2_2)}$:

生産計画：$X_{21}^{(2_2)} = 259.09 - 0.07b_{22}$

$X_{22}^{(2_2)} = 109.09 + 0.18b_{22}$

計画利益：$z_2^{(2_2)} = 2,100.00 + 0.50b_{22}$

計画実施領域：$R_2^{(2_2)} = \{(b_{21}, b_{22}) \mid b_{21} - 0.16b_{22} \geq \quad 395.45,$
$b_{22} \leq 3,071.29\}$

本部問題に追加する制約条件は

$$\begin{aligned} 0.26b_{11} - 0.22b_{12} &\geq \quad 195.65 \\ 3.38b_{21} - 0.54b_{22} &\geq 1,338.46 \end{aligned}$$

である．$\xi \leftarrow \xi + 1 = 2$，$k_i \leftarrow k_i + 1 = 2_i$，$i = 1, 2$．

ステップ2：本部は工場1と2に$0.26b_{11} - 0.22b_{12} = 195.65$と$3.38b_{21} - 0.54b_{22} = 1,338.46$に隣接する計画実施領域を持つ生産計画案の報告を求める．工場1と2は，それぞれ生産計画案$\mathcal{P}_1^{(2_1)}$と$\mathcal{P}_2^{(2_2)}$を本部に報告する．計画実施領域の組合せω_2は次のようである．

$$\begin{aligned} \omega_2 = \{(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) \mid \quad & b_{11} + \quad b_{21} \leq 3,400.00 \\ & b_{12} + \quad b_{22} \leq 9,400.00 \\ & 0.26b_{11} - 0.22b_{12} \geq \quad 195.65 \\ & 3.38b_{21} - 0.54b_{22} \geq 1,338.46 \\ & 6.00b_{11} - 5.00b_{12} \leq 4,500.00 \\ & b_{21} - 0.16b_{22} \geq \quad 395.45 \\ & b_{12} \geq 2,700.00,\ b_{22} \leq 3,701.29\} \end{aligned}$$

このときの各工場の工場利益はそれぞれ

$$\begin{aligned} z_1^{(2_1)} &= 3,150.00 + 1.50b_{12} \\ z_2^{(2_2)} &= 2,100.00 + 0.50b_{22} \end{aligned}$$

である．これより本部の目的関数を求めると

$$Z_2 = 5,250.00 - 0.30b_{11} + b_{12} - 0.30b_{21}$$

となる．したがって，本部問題は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } & Z_2(\boldsymbol{b}_i) = 5,250.00 - 0.30b_{11} + b_{12} - 0.30b_{21} \\
\text{sub. to } & b_{11} + b_{21} \leq 3,400.00 \\
& b_{12} + b_{22} \leq 9,400.00 \\
& 0.26b_{11} - 0.22b_{12} \geq 195.65 \\
& 3.38b_{21} - 0.54b_{22} \geq 1,338.46 \\
& 6.00b_{11} - 5.00b_{12} \leq 4,500.00 \\
& b_{21} - 0.16b_{22} \geq 395.45 \\
& b_{12} \geq 2,700.00,\ b_{22} \leq 3,701.29 \\
& b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \geq 0
\end{aligned}
$$

この本部問題は実行不可能であるので，$\omega_2 = \{\phi\}$ である．したがって，本部問題を実行可能にする新たな計画実施領域は存在しない．計算を終了する．

上記の計算の結果，資源の最適配分は

原材料：$b^*_{11} = 3,004.00$(kg)，$b^*_{21} = 395.99$(kg)

労働量：$b^*_{12} = 2,660.87$(man-h)，$b^*_{22} = 0.00$(man-h)

となる．このとき本部の評価基準であるシステム全体の総利益は

$Z^* = 6,796.57$（万円）

である．この最適な資源配分による各工場の最適な生産計画と工場利益はそれぞれ次のようになる．

工場１：$X^*_{11} = 0.0025 \doteq 0.00$(pc)，$X^*_{12} = 783.46 \doteq 783$(pc)，

$z^*_1 \doteq 7,047$（万円）

工場２：$X^*_{21} = 259.98 \doteq 260$(pc)，$X^*_{22} = 108$(pc)，

$z^*_2 = 2,100$（万円）

上記の計算結果を見ると，表 3.2，3.3 より工場 1 と 2 はそれぞれ 4 組の生産計画案を作成することができるのであるが，2 組の生産計画案を作成すればよいことがわかる．したがって，各工場は表 3.2，3.3 のようにすべての計画実施領域を求める必要はない．いまの数値計算例では，工場 1 と 2 はともに 1 回のパラメトリック分析を行うだけでよく，計算量を節約することができる．

3.4　2次モデルの最適化

3.4.1　非線形マクロ・モデル

前節では，$z_i(\boldsymbol{X}_i)$，$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{X}_i)$ が線形関数である場合について，工場問題をマルチパラメトリック線形計画問題として定式化することができることを示し，これを最適化することによって各工場の生産計画案を得ることができることを明らかにした．さらに工場問題の双対変数が本部問題の目的関数の劣勾配を構成することを示し，これを用いてシステム全体の最適化が達成されることを明らかにした．しかしながら，販売価格の値引きによって販売量が増加する場合や，習熟効果によって製品 1 個製造するのに要する労働時間が減少する場合などでは，販売価格や単位労働時間が製品の生産個数の関数として与えられることがある．このような場合，目的関数と制約条件式は非線形関数となり，問題は非線形計画問題となる．特に，目的関数が 2 次関数で，制約条件式が線形関数として定式化される 2 次計画問題は，平滑化問題や与えられた生産目標からのずれの 2 乗和を最小にする問題，あるいは Holt らの線形決定規則 [20] など数多く取り扱われている [22, 16]．本節では，このように $z_i(\boldsymbol{X}_i)$，

$g_i(\boldsymbol{X}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{X}_i)$ が非線形関数である場合に，前節で行なった展開を一般化することを試みる．

$z_i(\boldsymbol{X}_i)$，$g_i(\boldsymbol{X}_i)$，$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{X}_i)$ が非線形関数である場合，Geoffrion らは工場の目的関数と生産計画案の計画実施領域を式 (3.16)，(3.17) のように配分される資源$\boldsymbol{b}_i$に関して陽的に求めることは困難であることを指摘している [12]．そのために Geoffrion らはこの未知の目的関数と計画実施領域を探索するために接線近似法や許容方向法を提案している [12, 33]．工場問題を制約式右辺にベクトル・パラメータが存在するマルチパラメトリック非線形計画問題として解くことができれば，前節の線形モデルの場合と同様に工場の目的関数と計画実施領域を陽的に得ることができる．マルチパラメトリック非線形計画問題に対しては，単一パラメータの場合に縮約勾配法を用いた方法が Mine らによって提案されている [29]．2 次計画問題に対しては単一パラメータの場合では [14, 35] の報告があり，ベクトル・パラメータが存在する 2 次計画問題は，Van de Panne[36] によって与えられている．しかしながらこれらの研究では，明確な解法アルゴリズムが示されていず，また理論的検討も十分なされていない．

本節では工場問題が制約式右辺にベクトル・パラメータが存在する 2 次計画問題である場合を取りあげ，パラメータによって表現される解領域の理論的な性質を検討する．2 次計画問題の理論的側面は，一般の非線形計画問題と関連を持つので，これを行うことによって一般的な非線形資源配分計画問題についての明確な見通しが得られるものと期待できる．

3.4.2 工場問題の2次モデル

工場問題が 2 次計画問題として定式化できる例として，たとえば販売量が販売価格に依存する場合を考える．販売量は製品の価格$\boldsymbol{p}$によって規定され，販売できる量だけ生産するものと仮定する．すなわち販売価格$\boldsymbol{p}$による需要関数を $h(\boldsymbol{p})$ とすると，生産量は $\boldsymbol{X} = h(\boldsymbol{p})$ で与えられる．他方，製品の単位利益は，変動費用を$\boldsymbol{c}_v$とすると$\boldsymbol{r} = \boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}_v$で与えられるので，工場の目的関数は固定費用を$\boldsymbol{c}_f$とすると，次式で表すことができる．

$$\begin{aligned} z(\boldsymbol{X}) &= \boldsymbol{r}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{c}_f = (\boldsymbol{p} - \boldsymbol{c}_v)\boldsymbol{X} - \boldsymbol{c}_f \\ &= \boldsymbol{p}\boldsymbol{X} - \boldsymbol{c}_v\boldsymbol{X} - \boldsymbol{c}_f \end{aligned}$$

需要関数が$\boldsymbol{p}$の一次式$\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\alpha} - \boldsymbol{\beta}\boldsymbol{p}$で与えられるとき，上記の目的関数は次のようになる．

$$z(\boldsymbol{X}) = (\frac{\boldsymbol{\alpha}}{\boldsymbol{\beta}} - \boldsymbol{c}_v)\boldsymbol{X} - \frac{1}{\boldsymbol{\beta}}\boldsymbol{X}^2 - \boldsymbol{c}_f$$

2 次計画問題として定式化できる別の例として，与えられた生産目標からのずれの 2 乗和を最小にする場合を考える．生産目標を$\overline{\boldsymbol{X}}$とするとずれの 2 乗和を最小にするための目的関数は，次のようになる．

$$z(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}})^{\mathsf{T}}Q(\boldsymbol{X} - \overline{\boldsymbol{X}})$$

ここで Q はずれに対するペナルティ係数の行列である．これを展開すると

$$z(\boldsymbol{X}) = \frac{1}{2}\overline{\boldsymbol{X}}^{\mathsf{T}}Q\overline{\boldsymbol{X}} - \overline{\boldsymbol{X}}^{\mathsf{T}}Q\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^{\mathsf{T}}Q\boldsymbol{X}$$

となる．

これらの例の目的関数を一般的な形で表すと次のように書くことができる（定数項は省略する）．

$$z_i(\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{a}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{X}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_i^{\mathsf{T}}C_i\boldsymbol{X}_i$$

このことより，本節で取り扱う工場問題は，次のような制約式右辺にベクトル・パラメータが存在する 2 次計画問題であるとする．

$$\text{Max. } z_i(\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{a}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{X}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_i^{\mathsf{T}}C_i\boldsymbol{X}_i \tag{3.64}$$

$$\text{sub. to } A_i\boldsymbol{X}_i = \boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i \tag{3.65}$$

$$\boldsymbol{X}_i \geq 0 \tag{3.66}$$

ここで$\boldsymbol{X}_i$はスラック変数を含む $(p_{1i}+p_{2i}+m_i)$ ベクトル，A_iは $(p_{1i}+p_{2i})\times(p_{1i}+p_{2i}+m_i)$ 行列，$\boldsymbol{a}_i \in \mathrm{R}_i^{(p_{1i}+p_{2i}+m_i)}$，$C_i$は $(p_{1i}+p_{2i}+m_i)\times(p_{1i}+p2i+m_i)$ 正定値対称行列である．

この問題に対する Lagrange 関数を次のように設定する．

$$L_i(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \equiv \boldsymbol{a}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{X}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_i^{\mathsf{T}}C_i\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(A_i\boldsymbol{X}_i - (\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i)) \tag{3.67}$$

ここで$\boldsymbol{\lambda}_i \in \mathrm{R}_i^{(p_{1i}+p_{2i})}$は Lagrange 乗数である．いま

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{X}_i} = \boldsymbol{a}_i - C_i\boldsymbol{X}_i - A_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_i = -\boldsymbol{\pi}_i \tag{3.68}$$

とおくと，最適条件は次のようになる．

$$\boldsymbol{X}_i \geq 0, \boldsymbol{\lambda}_i \geq 0 \tag{3.69}$$

$$A_i\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{d}_i - D_i\boldsymbol{b}_i = 0 \tag{3.70}$$

$$C_i\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\pi}_i + A_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_i = \boldsymbol{a}_i \tag{3.71}$$

$$\boldsymbol{X}_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}_i = 0 \tag{3.72}$$

ここで$\boldsymbol{\pi}_i \in \mathrm{R}_i^{m_i}$である．

任意の$\boldsymbol{b}_i^0$に対して，この条件 (3.69)~(3.72) を満たす$\boldsymbol{X}_i^0$と$\boldsymbol{\lambda}_i^0$が存在するものと仮定する．この$\boldsymbol{X}_i^0$を基底変数$\boldsymbol{X}_{B_i}^0$と非基底変数$\boldsymbol{X}_{N_i}^0$に分割する．

$\boldsymbol{\pi}_i$，$\boldsymbol{a}_i$，A_i，C_iについてもこの基底変数と非基底変数に関連する部分に分割する．すなわち$\boldsymbol{\pi}_i = (\boldsymbol{\pi}_{B_i}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{\pi}_{N_i}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{a}_i = (\boldsymbol{a}_{B_i}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{a}_{N_i}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$，$A_i = (B_i, N_i)$，$C_i = ((C_{11i}, C_{21i})^{\mathsf{T}}, (C_{12i}, C_{22i})^{\mathsf{T}})$．これらを用いて最適条件 (3.69)~(3.72) を書き換えると，次のようになる．

$$\boldsymbol{X}_{Bi}^0 \geq 0, \boldsymbol{X}_{Ni}^0 \geq 0, \boldsymbol{\lambda}_i^0 \geq 0 \tag{3.73}$$

$$B_i\boldsymbol{X}_{Bi}^0 + N_i\boldsymbol{X}_{Ni}^0 = \boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i^0 \tag{3.74}$$

$$C_{11i}\boldsymbol{X}_{Bi}^0 + C_{12i}\boldsymbol{X}_{Ni}^0 - \boldsymbol{\pi}_{Bi} + B_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_i^0 = \boldsymbol{a}_{Bi} \tag{3.75}$$

$$C_{21i}\boldsymbol{X}_{Bi}^0 + C_{22i}\boldsymbol{X}_{Ni}^0 - \boldsymbol{\pi}_{Ni} + N_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_i^0 = \boldsymbol{a}_{Ni} \tag{3.76}$$

$$\boldsymbol{X}_{Bi}^{0\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}_{Bi} + \boldsymbol{X}_{Ni}^{0\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}_{Ni} = 0 \tag{3.77}$$

相補条件 (3.77) より，$\boldsymbol{X}_{Bi}^0 \geq 0, \boldsymbol{X}_{Ni}^0 = 0$とすると$\boldsymbol{\pi}_{Bi} = 0, \boldsymbol{\pi}_{Ni} \geq 0$であるので，式 (3.75) より

$$\boldsymbol{X}_{Bi}^0 = C_{11i}^{-1}(\boldsymbol{a}_{Bi} - B_i^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}_i) \geq 0$$

これと式 (3.74) より

$$\boldsymbol{\lambda}_i^0 = B_i^{-1^{\mathsf{T}}}(\boldsymbol{a}_{Bi} - C_{11i}B_i^{-1}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i^0)) \tag{3.78}$$

したがって，

$$\boldsymbol{X}_{Bi}^0 = B_i^{-1}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i^0) = \boldsymbol{d}_i^0 + D_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \tag{3.79}$$

ここで$\boldsymbol{d}_i^0 = B_i^{-1}\boldsymbol{d}_i$，$D_i^0 = B_i^{-1}D_i$である．他方，式 (3.76) と式 (3.78)，(3.79) より

$$\begin{aligned}&C_{21i}\{B_i^{-1}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i^0)\} - \boldsymbol{\pi}_{Ni}\\&+N_i^{\mathsf{T}}\{B_i^{-1^{\mathsf{T}}}(\boldsymbol{a}_{Bi} - C_{11i}B_i^{-1}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{b}_i^0))\} = \boldsymbol{a}_{Ni}\end{aligned}$$

表 3.4 初期表

		$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{X}_N$	$\boldsymbol{\pi}_B$	$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{\pi}_B$	$-\boldsymbol{a}_B$		$-C_{11}$	$-C_{12}$	I		$-B^{\top}$
$\boldsymbol{\pi}_N$	$-\boldsymbol{a}_N$		$-C_{21}$	$-C_{22}$		I	$-N^{\top}$
$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{d}$	D	B	N			

ゆえに，

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\pi}_{N_i} &= -\boldsymbol{a}_{N_i} + N_i^{\top} {B_i^{-1}}^{\top} \boldsymbol{a}_{B_i} \\
&\quad +(C_{21_i} - N_i^{\top} {B_i^{-1}}^{\top} C_{11_i})\boldsymbol{d}_i^0 \\
&\quad +(C_{21_i} - N_i^{\top} {B_i^{-1}}^{\top} C_{11_i})D_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \\
&= \boldsymbol{q}_i^0 + \boldsymbol{Q}_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \qquad (3.80)
\end{aligned}
$$

式 (3.79) より

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\lambda}_i^0 &= {B_i^{-1}}^{\top}\boldsymbol{a}_{B_i} - {B_i^{-1}}^{\top} C_{11_i}\boldsymbol{d}_i^0 - {B_i^{-1}}^{\top} C_{11_i}D_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \\
&= \boldsymbol{p}_i^0 + \boldsymbol{P}_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \qquad (3.81)
\end{aligned}
$$

ここで，$\boldsymbol{p}_i^0 = {B_i^{-1}}^{\top}(\boldsymbol{a}_{B_i} - C_{11_i}\boldsymbol{d}_i^0)$，$\boldsymbol{P}_i^0 = -{B_i^{-1}}^{\top} C_{11_i}D_i^0$，$\boldsymbol{q}_i^0 = -\boldsymbol{a}_{N_i} + N_i^{\top}{B_i^{-1}}^{\top}\boldsymbol{a}_{B_i} + (C_{21_i} - N_i^{\top}{B_i^{-1}}^{\top}C_{11_i})\boldsymbol{d}_i^0$，$\boldsymbol{Q}_i = (C_{21_i} - N_i^{\top}{B_i^{-1}}^{\top}C_{11_i})D_i^0$である．

これらの結果は，線形計画法で用いるシンプレックス表を用いて求めることができる．式 (3.74)～(3.76) に基づいて初期表を作成すると表 3.4 のようになる．このときのスラック変数が基底変数$\boldsymbol{X}_{B_i}$である．任意の$\boldsymbol{b}_i^0$に対して式 (3.79)，(3.80)，(3.81) が得られるように基底変換すると，表 3.5 のような最適表を得る．この表を用いてパラメトリック分析を行うのであるが，$\boldsymbol{\lambda}_i$を基底に保つために以後のピボット操作では$\boldsymbol{X}$と$\boldsymbol{\pi}$に関する部分（点線で囲った部分）のみを対象にする．

表 3.5 最適表

		$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{X}_N$	$\boldsymbol{\pi}_B$	$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{\lambda}$	$\boldsymbol{p}^0$	$\boldsymbol{P}^0$		C_1^0	${B^{-1}}^{\top}$		I
$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{q}^0$	$\boldsymbol{Q}^0$		C_2^0	$-N^{\top}B^{\top}$	I	
$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{d}^0$	D^0	I	$(N^{\top}{B^{-1}}^{\top})^{\top}$			

ここに $C_1^0 = -{B^{-1}}^{\top}(-C_{12} + N^{\top}{B^{-1}}^{\top}C_{11})$，

$$
C_2^0 = (N^{\top}{B^{-1}}^{\top}, I)C\begin{pmatrix} (N^{\top}{B^{-1}}^{\top})^{\top} \\ I \end{pmatrix}
$$

以上の結果を用いて，目的関数 (3.64) を書き換えると次のようになる．

$$
\begin{aligned}
z_i(\boldsymbol{X}_i^0(\boldsymbol{b}_i^0)) &= z_i(\boldsymbol{b}_i^0) \\
&= \boldsymbol{a}_{B_i}^{\top}\boldsymbol{d}_i^0 - \frac{1}{2}{\boldsymbol{d}_i^0}^{\top} C_{11_i}\boldsymbol{d}_i^0 + \boldsymbol{a}_{B_i}^{\top}D_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \\
&\quad -\frac{1}{2}(D_i^0\boldsymbol{b}_i^0)^{\top} C_{11_i}\boldsymbol{d}_i^0 - \frac{1}{2}{\boldsymbol{d}_i^0}^{\top} C_{11_i}D_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \\
&\quad -\frac{1}{2}{\boldsymbol{b}_i^0}^{\top} {D_i^0}^{\top} C_{11_i}D_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \\
&= F_{\max_i} - F_{1_i}\boldsymbol{b}_i^0 - \frac{1}{2}{\boldsymbol{b}_i^0}^{\top} F_{2_i}\boldsymbol{b}_i^0 \qquad (3.82)
\end{aligned}
$$

ここで，$F_{\max_i} = \boldsymbol{a}_{B_i}^{\top}\boldsymbol{d}_i^0 - \frac{1}{2}{\boldsymbol{d}_i^0}^{\top}C_{11_i}\boldsymbol{d}_i^0$，$F_{1_i} = -\boldsymbol{a}_{B_i}^{\top}D_i^0 + {\boldsymbol{d}_i^0}^{\top}C_{11_i}D_i^0$，$F_{2_i} = {D_i^0}^{\top}C_{11_i}D_i^0$である．$C_{11_i}$は正定値対称行列であるので，$F_{2_i}$も正定値対称行列である．したがって $z_i(\boldsymbol{b}_i^0)$ も凹関数となる．式 (3.79)，(3.80)，(3.82) によって基底変数$\boldsymbol{X}_{B_i}, \boldsymbol{\pi}_{N_i}$と目的関数 z_iを任意のベクトル・パラメータ$\boldsymbol{b}_i^0$で表現することができた．$\boldsymbol{b}_i^0$が変化してもなお$\boldsymbol{X}_{B_i}$，$\boldsymbol{\pi}_{N_i}$が基底解であるような$\boldsymbol{b}_i^0$の領域を式 (3.79)，(3.80) に基づいて次のように定義する．

$$
R_i(\boldsymbol{b}_i^0) = \{\boldsymbol{b}_i^0 \mid \boldsymbol{d}_i^0 + D_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \geq 0, \boldsymbol{q}_i^0 + \boldsymbol{Q}_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \geq 0\} \qquad (3.83)
$$

表 3.6 パラメトリック表

		$\boldsymbol{b}$	$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{X}_N$	$\boldsymbol{\pi}_B$	$\boldsymbol{\pi}_N$
$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{q}^1$	$\boldsymbol{Q}^1$		A_1	A_3	I
$\boldsymbol{X}_B$	$\boldsymbol{b}^1$	D^1	I	A_2	A_4	

$\boldsymbol{b}_i^0$が$\Delta\boldsymbol{b}_i$だけ変化して式 (3.79) を構成する不等式の 1 つが等号で成り立つとする．すなわち

$$\boldsymbol{b}_i^0 + \Delta\boldsymbol{b}_i \in bdR_i(\boldsymbol{b}_i^0)$$

のとき，表 3.5 の C_2^0に負の要素が存在すれば，不等式$\boldsymbol{q}_i^0 + \boldsymbol{Q}_i^0\boldsymbol{b}_i^0 \geq 0$の中の 1 つの不等式が等式で成り立つ．この不等式が h 番目の不等式であるとする．そのとき$\pi_{Nih} = 0$となり，それに対応する非基底変数 X_{Nih}と基底変換される．この基底変換によって基底変数$\boldsymbol{X}_{Bi}$は $p_{1i} + p_{2i} + 1$ 個になり$\boldsymbol{\pi}_{Ni}$は $m_i - 1$ 個になる．それにともなって基底行列 B_iも 1 行 1 列増える．この新しい基底変数と基底行列をそれぞれ$\boldsymbol{X}_{Bi}^1$，$\boldsymbol{\pi}_{Ni}^1$，B_i^1とし，そのときのパラメータの値を$\boldsymbol{b}_i^1 (= \boldsymbol{b}_i^0 + \Delta\boldsymbol{b}_i)$とする．このときの表が表 3.6 のようであるとする．$\boldsymbol{b}_i$が$\boldsymbol{b}_i^1$よりさらに変化すると，表 3.6 の A_4に負の要素が存在すれば基底変数 X_{Bih}が非基底変数となり，それに対応するπ_{Bih}が基底変数となる．このとき基底行列は 1 行 1 列減少する．このように 2 次モデルの場合は，線形モデルの場合とは異なって基底行列が変化する．

このような基底変換を行うことによって K_i組の計画実施領域を得ることができたとする．このときの最適解と最適値，ならびに$\boldsymbol{b}_i$の計画実施領域を次のように表す．

$$\boldsymbol{X}_{Bi}^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i) = \boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + D_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i,\ \boldsymbol{X}_{Ni}^{(k_i)} = 0 \tag{3.84}$$

$$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i) = F_{\max_i}^{(k_i)} - F_{1i}^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_i^\top F_{2i}^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i \tag{3.85}$$

$$R_i^{(k_i)} = \{\boldsymbol{b}_i \mid \boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + D_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i \geq 0, \boldsymbol{q}_i^{(k_i)} + \boldsymbol{Q}_i^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i \geq 0\} \tag{3.86}$$

ここで$\boldsymbol{d}_i^{(k_i)}, D_i^{(k_i)}, \boldsymbol{q}_i^{(k_i)}, \boldsymbol{Q}_i^{(k_i)}$は基底変換によって得ることのできる表内に現われる要素であり，$F_{\max_i}^{(k_i)}$，$F_{1i}^{(k_i)}$，$F_{2i}^{(k_i)}$はこれらを用いて求めることができる．

前節と同様にして，工場問題 (3.64)~(3.66) が最適解を持つような$\boldsymbol{b}_i$の全領域を

$$M_i = \bigcup_{k_i=1}^{K_i} R_i^{(k_i)}$$

と定義する．この M_i上で定義される工場問題の目的関数を $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ とすると，これは次のような M_i上のすべての点で微分可能でない次のような関数である．

$$z_i^0(\boldsymbol{b}_i) = \begin{cases} z_i^{(1_i)}(\boldsymbol{b}_i) = F_{\max_i}^{(1_i)} - F_{1i}^{(1_i)}\boldsymbol{b}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_i^\top F_{2i}^{(1_i)}\boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i \in R_i^{(1_i)} \\ z_i^{(2_i)}(\boldsymbol{b}_i) = F_{\max_i}^{(2_i)} - F_{1i}^{(2_i)}\boldsymbol{b}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_i^\top F_{2i}^{(2_i)}\boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i \in R_i^{(2_i)} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \quad\vdots \\ z_i^{(K_i)}(\boldsymbol{b}_i) = F_{\max_i}^{(K_i)} - F_{1i}^{(K_i)}\boldsymbol{b}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}_i^\top F_{2i}^{(K_i)}\boldsymbol{b}_i, & \boldsymbol{b}_i \in R_i^{(K_i)} \end{cases} \tag{3.87}$$

定理 3.3と同様に上式で定義した $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ についても次の定理が成り立つ．

定理 3.9 $D_{ijq} \geq 0$のとき，$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ と $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ は$\boldsymbol{b}_i$について増加凹関数である．

証明　式 (3.82) より

$$\frac{\partial z_i^{(k_i)}}{\partial \boldsymbol{b}_i} = -F_{1i}^{(k_i)} - F_{2i}^{(k_i)}\boldsymbol{b}_i$$

ここで

$$\begin{aligned} F_{1i}^{(k_i)} &= -\boldsymbol{a}_{Bi}^\top D_i^{(k_i)} + \boldsymbol{d}_i^{(k_i)\top} C_{11i} D_i^{(k_i)} \\ F_{2i}^{(k_i)} &= D_i^{(k_i)\top} C_{11i} D_i^{(k_i)} \end{aligned}$$

であるので

$$\begin{aligned}
\frac{\partial z_i^{(k_i)}}{\partial \boldsymbol{b}_i} &= \boldsymbol{a}_{Bi}^\top - \boldsymbol{d}_i^{(k_i)\top} C_{11i} D_i^{(k_i)} - D_i^{(k_i)\top} C_{11i} D_i^{(k_i)} \boldsymbol{b}_i \\
&= D_i^{(k_i)\top} (\boldsymbol{a}_{Bi} - C_{11i}(\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + D_i^{(k_i)} \boldsymbol{b}_i)) \\
&= D_i^\top B_i^{(k_i)^{-1}} (\boldsymbol{a}_{Bi} - C_{11i} B_i^{(k_i)^{-1}} (\boldsymbol{d}_i + D_i \boldsymbol{b}_i)) \\
&= D_i^\top \boldsymbol{\lambda}_i^{(k_i)} \qquad (3.88)
\end{aligned}$$

最適解においては$\boldsymbol{\lambda}_i^{(k_i)} \geq 0$であるので，$z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ は $R_i^{(k_i)}$上で増加凹関数である．また式 (3.87) より $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)$ も M_i上で増加凹関数である．

∎

隣接領域に関する定義は，前節の定義 3.1，3.2同様である．

3.4.3 本部計画の設定と最適化

本部問題は前節と同様に次のようであるとする．

$$\text{Max. } Z^0(\boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{N} z_i^0(\boldsymbol{b}_i) - \boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{b} \qquad (3.89)$$

$$\text{sub. to } G\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{b}_0 \qquad (3.90)$$

$$\boldsymbol{b}_i \in M_i, i = 1, \cdots, N \qquad (3.91)$$

この制約条件を

$$\Omega = \{\boldsymbol{b} \mid G\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b}_i \in M_i, i = 1, \cdots, N\}$$

と定義すると，このΩと式 (3.89) で与えた $Z^0(\boldsymbol{b})$ に対しても定理 3.4が成り立つ．

各工場問題の計画実施領域 $R_i^{(k_i)}$の中から$\bigcap_{i=1}^{N} R_i^{(\hat{k}_i)} \neq \phi$となるような任意の $R_i^{(\hat{k}_i)}$を選び，次式で定義されるω_ξが J，$(1 \leq J \leq \prod_{i=1}^{N} K_i)$ 組存在するものとする．

$$\omega_\xi = \bigcap_{i=1}^{N} R_i^{(\hat{k}_i)} \bigcap \{\boldsymbol{b} \mid G\boldsymbol{b} \leq \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{b} \geq 0\}, \hat{k}_i \in \Lambda_\xi, \xi = 1, \cdots, J \qquad (3.92)$$

ここでΛ_ξはω_ξを構成する計画実施領域の添字集合である．

このω_ξ上で定義される本部目的関数 $Z_\xi(\boldsymbol{b})$ は次のようになる．

$$\begin{aligned}
Z_\xi(\boldsymbol{b}) &= \sum_{i=1}^{N} z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i) - \boldsymbol{C}^\top \boldsymbol{b} \\
&= \sum_{i=1}^{N} (F_{\max_i}^{(\hat{k}_i)} - F_{1i}^{(\hat{k}_i)} \boldsymbol{b}_i - \frac{1}{2} \boldsymbol{b}_i^\top F_{2i}^{(\hat{k}_i)} \boldsymbol{b}_i) - \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{C}_i^\top \boldsymbol{b}_i \\
&= \sum_{i=1}^{N} F_{\max_i}^{(\hat{k}_i)} - \sum_{i=1}^{N} (F_{1i}^{(\hat{k}_i)} + \boldsymbol{C}_i) \boldsymbol{b}_i - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i^\top F_{2i}^{(\hat{k}_i)} \boldsymbol{b}_i \\
&= Z_{\max}^{(\xi)} - F_1^{(\xi)} \boldsymbol{b} - \frac{1}{2} \boldsymbol{b}^\top F_2^{(\xi)} \boldsymbol{b}, \hat{k}_i \in \Lambda_\xi \qquad (3.93)
\end{aligned}$$

ここで，$Z_{\max}^{(\xi)} = \sum_{i=1}^{N} F_{\max_i}^{(\hat{k}_i)}$，$F_1^{(\xi)} = ((F_{11}^{(\hat{k}_1)} + \boldsymbol{C}_1)^\top, \cdots, (F_{1N}^{(\hat{k}_N)} + \boldsymbol{C}_N)^\top)^\top$，

$$F_2^{(\xi)} = \begin{pmatrix} F_{21}^{(\hat{k}_1)} & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & F_{2N}^{(\hat{k}_N)} \end{pmatrix},$$

$\boldsymbol{b} = (\boldsymbol{b}_1^\top, \cdots, \boldsymbol{b}_N^\top)^\top$である．

このω_ξと Z_ξに関しても次の定理が成り立つ．

定理 3.10 ω_ξは閉凸多面体である．また $Z_\xi(\boldsymbol{b})$ は$\boldsymbol{b} \in \omega_\xi$上で増加凹関数である．

∎

この定理の証明は定理 3.5と同様に行えばよいので省略する．

Ω上で定義される $Z_\xi(\boldsymbol{b})$ を $Z^0(\boldsymbol{b})$ とすれば，定理 3.9と定理 3.10から，これはΩ上のすべての点で微分可能でない次のような関数であることがわかる．

$$Z^0(\boldsymbol{b}) = \begin{cases} Z_1(\boldsymbol{b}) = Z_{\max}^{(1)} + F_1^{(1)}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^\top F_2^{(1)}\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{b} \in \omega_1 \\ Z_2(\boldsymbol{b}) = Z_{\max}^{(2)} + F_1^{(2)}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^\top F_2^{(2)}\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{b} \in \omega_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \quad\vdots \\ Z_J(\boldsymbol{b}) = Z_{\max}^{(J)} + F_1^{(J)}\boldsymbol{b} - \frac{1}{2}\boldsymbol{b}^\top F_2^{(J)}\boldsymbol{b}, & \boldsymbol{b} \in \omega_J \end{cases} \tag{3.94}$$

この $Z^0(\boldsymbol{b})$ を用いて本部計画問題 (3.89)~(3.91) を書き換えると次のようになる.

$$\text{Max. } Z^0(\boldsymbol{b}) \tag{3.95}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{b}_i \in \Omega, i = 1, \cdots, N \tag{3.96}$$

3.3.4 項と同様に行うことによって, この本部計画問題はさらに次のように書き換えることができる.

$$\text{Max. } Z^+(\boldsymbol{b}) = \min_\xi Z_\xi(\boldsymbol{b}) \tag{3.97}$$

$$\text{sub. to } \sum_{i=1}^{N} \boldsymbol{b}_i \le \boldsymbol{b}_0 \tag{3.98}$$

$$\boldsymbol{b}_i \ge 0 \tag{3.99}$$

この本部問題に対しても定理 3.6, 3.7が成り立ち, $\boldsymbol{b}_i \in \omega_\xi$に関する $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣微分がわかれば, Z^+の劣微分$\partial Z^+(\boldsymbol{b})$を求めることができる. $z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ の劣微分$\partial z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ を構成する劣勾配$\boldsymbol{\rho}_i$と工場問題 (3.64)~(3.66) の Lagrange 乗数$\boldsymbol{\lambda}_i$との間には定理 3.8と同様の次の定理が成り立つ.

定理 3.11 工場問題 (3.64)~(3.66) の Lagrange関数を

$$L_i(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \boldsymbol{a}_i^\top \boldsymbol{X}_i - \frac{1}{2}\boldsymbol{X}_i^\top C_i \boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{\lambda}_i^\top (A_i \boldsymbol{X}_i - (\boldsymbol{d}_i + D_i \boldsymbol{b}_i))$$

とする. $\boldsymbol{X}_i^*$を工場問題の解とすると, $-\boldsymbol{\lambda}_i^{*\top} D_i$が$\boldsymbol{b}_i$における劣勾配, すなわち$-\boldsymbol{\lambda}_i^{*\top} D_i \in \partial z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{b}_i)$ であるための必要十分条件は, $(\boldsymbol{X}_i^*, \boldsymbol{\lambda}_i^*)$ が L_i

の鞍点条件

$$L_i(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{\lambda}_i^*) \le L_i(\boldsymbol{X}_i^*, \boldsymbol{\lambda}_i^*) \le L_i(\boldsymbol{X}_i^*, \boldsymbol{\lambda}_i)$$

$$\boldsymbol{X}_i \in \mathrm{R}^{m_i}, \boldsymbol{\lambda}_i \ge 0 \tag{3.100}$$

を満たすことである. ∎

この定理の証明は, 定理 3.8の場合と同様に行うことができるので, ここでは省略する.

一般的に, 2 次計画問題を含む非線形計画問題の最適解は, 制約条件によって作られる実行可能領域の内点に存在する場合がある. しかしながら, 本節で取りあげた 2 次モデルの本部計画問題は目的関数が式 (3.89) で表わされる増加凹関数となるので, 最適解はωの境界上に存在する. したがって, 線形モデルの場合と同様に最適化することができ, 3.3.5 項で提案したアルゴリズムも工場目的関数を式 (3.89) に置き換えるだけでそのまま適用することができる.

3.4.4 数値計算例

2 次モデルの計算例として, 3.4.2 項で述べた製品の販売量が販売価格に従う場合を取りあげる. 製品の需要関数と変動費用は表 3.7 のようであるとすると, 工場の目的関数はそれぞれ次のようになる.

$$\begin{aligned} z_1 &= 150X_{11} + 160X_{12} - \frac{1}{2}(X_{11}^2 + X_{12}^2) \\ z_2 &= 300X_{21} + 200X_{22} - \frac{1}{2}(2X_{21}^2 + X_{22}^2) \end{aligned}$$

販売価格以外のデータと本部問題は前節の数値計算例 (表 3.1) と同様であるとする. このとき, 工場の生産計画問題は次のような 2 次計画問題となる.

表 3.7 需要関数と変動費用

工場	製品	需要関数	変動費用（千円/pc）
1	P_{11}	$16,300-2r_{11}$	8
	P_{12}	$27,320-2r_{12}$	13.5
2	P_{21}	$10,300-r_{21}$	10
	P_{22}	$18,400-2r_{22}$	9

＜工場 1 ＞

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } z_1 &= 150X_{11}+160X_{12}-\frac{1}{2}(X_{11}^2+X_{12}^2)\\
\text{sub. to } & 2X_{11}+5X_{12}\le 1,000+b_{11}\\
& 7X_{11}+6X_{12}\le 2,100 \qquad +b_{12}\\
& 16X_{11}+5X_{12}\le 4,000\\
& X_{11},X_{12}\ge 0
\end{aligned}
$$

＜工場 2 ＞

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } z_2 &= 300X_{21}+200X_{22}-\frac{1}{2}(2X_{21}^2+X_{22}^2)\\
\text{sub. to } & 3X_{21}+2X_{22}\le 600+b_{21}\\
& 4X_{21}+7X_{22}\le 1,800 \qquad +b_{22}\\
& 8X_{21}+3X_{22}\le 2,400\\
& X_{21},X_{22}\ge 0
\end{aligned}
$$

マルチパラメトリック２次計画問題としてこれらの工場問題を解くと，各工場について表 3.8 に示すような生産計画案を得た．前節で提案したアル

表 3.8 生産計画案

工場 1

計画案 $\mathcal{P}_1^{(k_1)}$	生産計画 X_{11}	生産計画 X_{12}	計画利益 z_1	計画実施領域 $R_1^{(k_1)}$
$\mathcal{P}_1^{(1_1)}$	$143.10+0.07b_{11}$	$142.76+0.17b_{11}$	$-0.02b_{11}^2+3.44b_{11}$ $+23,877.59$	$1.52b_{11}-b_{12}\le 241.72$ $0\le b_{11}\le 100.00$
$\mathcal{P}_1^{(2_1)}$	195.55	174.24	22,911.19	$b_{11}\ge 262.28$ $b_{12}\ge 314.27$
$\mathcal{P}_1^{(3_1)}$	150.00	160.00	24,050.00	$b_{11}\ge 100.00$

工場 2

計画案 $\mathcal{P}_2^{(k_2)}$	生産計画 X_{21}	生産計画 X_{22}	計画利益 z_2	計画実施領域 $R_2^{(k_2)}$
$\mathcal{P}_2^{(1_2)}$	$105.88+0.18b_{21}$	$141.18+0.24b_{21}$	$-0.06b_{21}^2+29.35b_{21}$ $+38,823.53$	$2.35b_{21}-b_{22}\le 388.24$ $0\le b_{21}\le 249.25$
$\mathcal{P}_2^{(2_2)}$	$142.98+0.04b_{22}$	$175.44+0.12b_{22}$	$-0.01b_{22}^2+3.51b_{22}$ $+42,149.13$	$0\le b_{22}\le 194.94$ $b_{21}-0.35b_{22}\ge 179.83$
$\mathcal{P}_2^{(3_2)}$	208.54	243.90	38,109.72	$b_{21}\ge 513.42$ $b_{22}\ge 741.46$
$\mathcal{P}_2^{(4_2)}$	150.00	200.00	42,500.00	$b_{21}\ge 250.00$ $b_{22}\ge 200.00$

ゴリズムで，ω_ξ上で定義される本部の目的関数を式 (3.93) に置き換える．この置き換えを行ったアルゴリズムに従って，2次モデルの数値計算例を解くと以下のようになる．

ステップ1：工場1と2が本部に報告する生産計画案がそれぞれ $\mathcal{P}_1^{(1_1)}$，$\mathcal{P}_2^{(1_2)}$とする．各工場の計画実施領域はそれぞれ次のようである．

$$R_1^{(1_1)} = \{(b_{11}, b_{12}) \mid 1.52b_{11} - b_{12} \leq 241.72, b_{11} \leq 100.00\}$$

$$R_2^{(1_2)} = \{(b_{21}, b_{22}) \mid 2.35b_{21} - b_{22} \leq 388.24, b_{22} \leq 249.25\}$$

ステップ2：$\xi = 1$．

計画実施領域の組合せω_1は次のようになる．

$$\begin{aligned} \omega_1 = \{(b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}) \mid \quad & b_{11} + b_{21} \leq 3,400.00 \\ & b_{12} + b_{22} \leq 9,400.00 \\ & 1.52b_{11} - b_{12} \leq \quad 241.72 \\ & 2.35b_{21} - b_{22} \leq \quad 388.24 \\ & b_{11} \leq 100.00, b_{22} \leq 249.25\} \end{aligned}$$

各工場の工場利益はそれぞれ

$$\begin{aligned} z_1^{(1_1)}(\boldsymbol{b}) &= -0.02b_{11}^2 + \ 3.44b_{11} + 23,877.59 \\ z_2^{(1_2)}(\boldsymbol{b}) &= -0.06b_{21}^2 + 29.35b_{21} + 38,823.53 \end{aligned}$$

である．これより本部目的関数は次のようになる．

$$\begin{aligned} Z_1(\boldsymbol{b}) = & -0.02b_{11}^2 + 3.14b_{11} - 0.50b_{12} \\ & -0.06b_{21}^2 - 29.05b_{21} - 0.50b_{22} + 62,701.10 \end{aligned}$$

したがって，本部問題は次のようになる．

$$\begin{aligned} \text{Max. } Z_1(\boldsymbol{b}) = & -0.02b_{11}^2 + 3.14b_{11} - 0.50b_{12} \\ & -0.06b_{21}^2 - 29.05b_{21} - 0.50b_{22} + 62,701.10 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{sub. to} \quad & b_{11} + b_{21} \leq 3,400.00 \\ & b_{12} + b_{22} \leq 9,400.00 \\ & 1.52b_{11} - b_{12} \leq \quad 241.72 \\ & 2.35b_{21} - b_{22} \leq \quad 388.24 \\ & b_{11} \leq 100.00, b_{22} \leq 249.25 \\ & b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22} \geq 0 \end{aligned}$$

これを解くと$\bar{b}_{11} = 92.38$，$\bar{b}_{12} = 0.00$，$\bar{b}_{21} = 236.25$，$\bar{b}_{22} = 166.93$，$Z_1^*(\bar{\boldsymbol{b}}_i) = 66,333.45$ を得る．

ステップ3：ω_1に隣接する $R_i^{(2_i)}$を求める．そのためにステップ2の本部問題の制約条件で等号で成り立つ制約式を探すと，

$$2.35\bar{b}_{21} - \bar{b}_{22} = 388.24$$

のみであるので，$I_1^{(1_1)} = \{\phi\}$，$I_2^{(1_2)} = \{1\}$ となる．制約式 $2.35b_{21} - b_{22} \leq 388.24$ の境界上での本部目的関数 $Z_1(\bar{\boldsymbol{b}})$ の劣勾配は，

$$\rho_{21} = -0.12\bar{b}_{21} - 29.05 \leq 0, \rho_{22} = -0.50 \leq 0$$

である．したがって，本部目的関数を増加させる隣接領域は存在しない．計算終了をする．

上記の計算の結果，資源の最適配分は

原材料：$b_{11}^* = 92.38$(kg)，$b_{21}^* = 236.25$(kg)

労働量：$b_{12}^* = 0.00$(man-h)，$b_{22}^* = 166.96$(man-h)

となる．このとき本部の評価基準であるシステム全体の総利益は

$Z^* = 66,333.45$ (万円)

である．この最適な資源配分による各工場の最適な生産計画と工場利益はそれぞれ次のようになる．

工場 1 ： $X^*_{11} = 149.48 \doteq 149(\mathrm{pc})$， $X^*_{12} = 158.65 \doteq 159(\mathrm{pc})$，

$z^*_1 = 24,050.40$ (万円)

工場 2 ： $X^*_{21} = 147.46 \doteq 147(\mathrm{pc})$， $X^*_{22} = 196.70 \doteq 197(\mathrm{pc})$，

$z^*_2 = 42,465.11$ (万円)

この数値計算例では，表 3.8 のように工場 1 は 3 組の生産計画案を，工場 2 は 4 組の生産計画案を作成することができる．しかしながら，上記の計算結果を見ると，生産計画案 $\mathcal{P}_1^{(1_1)}$ と $\mathcal{P}_2^{(1_2)}$ 以外に本部目的関数を改良する生産計画案が存在しないので，残りの生産計画案を作成する必要はない．

3.5 工場間に技術的相互関係が存在する場合のマクロ・モデル

3.5.1 技術的相互関係

3.3 節で取り上げたモデルは，本部が各工場に資源を配分することによって工場を統合しようとするもので，工場間にシステム干渉が存在する場合であった．本節では，ある工場が他の工場で生産される製品を構成する半製品や部品（これを中間品と呼ぶ）を生産している場合を取り扱う（図 3.1）．このような工場間の相互関係はプロセス干渉で，システム干渉より強い相互関係である．本節で対象とするマクロ・モデルは，本部が行う資源配分にともなうシステム干渉と，工場間の直接的な入出力関係であるプロセス干渉が同時に存在する場合のモデルである．

このような相互関係は，ある製品を構成する部品の種類と数量に関する関係と，部品を生産する工場（部品生産工場）が製品を生産する工場（製品生産工場）に中間品を振り替えるときの振替価格に関する関係が存

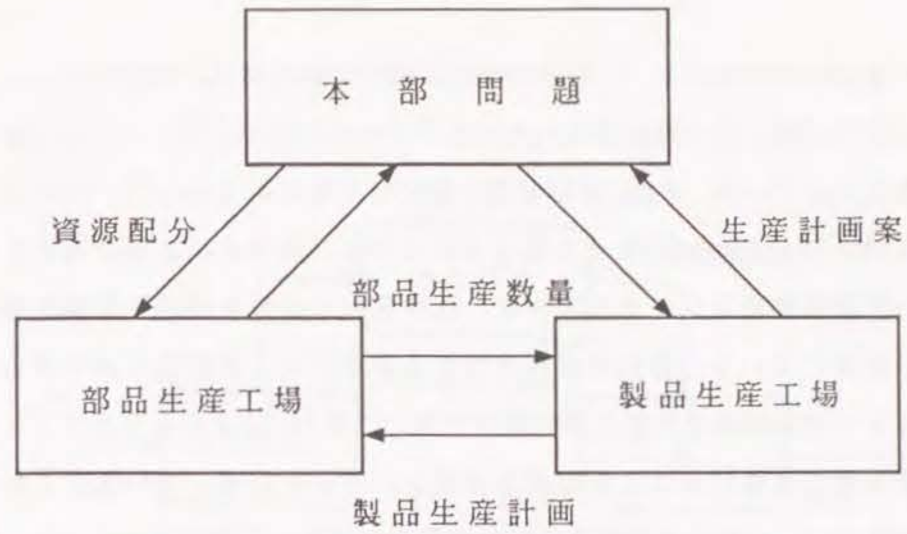


図 3.1 技術的相互関係が存在するマクロ・モデル

在する．本節では，前者の製品構成に関する相互関係を「技術的相互関係」と呼び，後者の振替価格に関する相互関係を「金銭的相互関係」と呼ぶことにする．

工場間に金銭的相互関係が存在する場合，中間品の外部市場の存在が振替価格の設定に影響を与える．すなわち，中間品に外部市場が存在すれば，部品生産工場は中間品を外部市場で販売することができ，他方，製品生産工場は外部市場から中間品を調達することができる．振替価格には，このような外部市場が存在する場合では中間品の販売価格を振替価格とする市価基準があり，外部市場が存在しない場合では中間品の製造原価を振替価格とする原価基準がある．さらに，準拠すべき基準が存在しない場合では交渉価格を振替価格とすることがある [2]．市価基準による振替価格では，振替価格にともなう利益は部品生産工場に集中する．他方，原価基準では，製品生産工場に振替価格にともなう利益が集中する．このような利益の集中を排除するために，利益を得る工場が一方の工場の利益を補償する基準が考えられている．これには，市価マイナス基準や原価プ

ラス値込め基準がある．この振替価格に関する研究には，限界分析による Hirshleifer[18, 17] や機会原価を用いた Holstrum-Souls[19]，Onsi[31] などが報告されている．また，分割原理を適用したものに Hass[15]，Enzer[9]，Dirieckx-Jennergren[8] などが報告されている．限界分析と機会原価に基づいて振替価格を決定する方法は，振替量および振替価格を本部が最終的に決定している．分割原理を適用する方法では，振替価格は市価に等しくなり利益は部品生産工場に集中する．門田 [4, 5] はシャドウプライスと累積機会原価法による振替価格決定システムを提案している．これらの研究では，中間品の振替量は振替価格の値に従って決定されており，技術的相互関係を考慮していない．本節では，振替価格はすでに決定されているものと仮定し，技術的相互関係のみを取り扱うことにする．

技術的相互関係は，製品生産工場が製品を生産するときに必要とする中間品の種類・量と，部品生産工場が生産する中間品の種類・供給量の関係であるといえる．このことは，製品生産工場側からみれば，工場の生産計画は部品生産工場の生産計画の影響を受け，逆に部品生産工場の生産計画は製品生産工場の生産計画の影響を受けることを意味する．中間品に外部市場が存在する場合，部品生産工場は外部市場に中間品を販売することができ，また製品生産工場は外部市場から中間品を調達することができる．このように外部市場の存在は工場間の相互関係に影響を与える．本節ではこのような中間品に外部市場が存在している場合の相互関係を取り扱うことにする．

これらのことを図示すると，図 3.2のように表すことができる．ここで，$\mathcal{S}_j$は工場 jに中間品を供給する工場の集合であり，$\mathcal{U}_i$は工場 iから中間品の供給を受ける工場の集合である．工場 iの生産量は，外部市場の需要を満たす部分$\boldsymbol{X}_{1i} \in \mathrm{R}^{m_{1i}}$と振替先工場の要求を満たす部分$\boldsymbol{X}_{2i} \in \mathrm{R}^{m_{2i}}$から

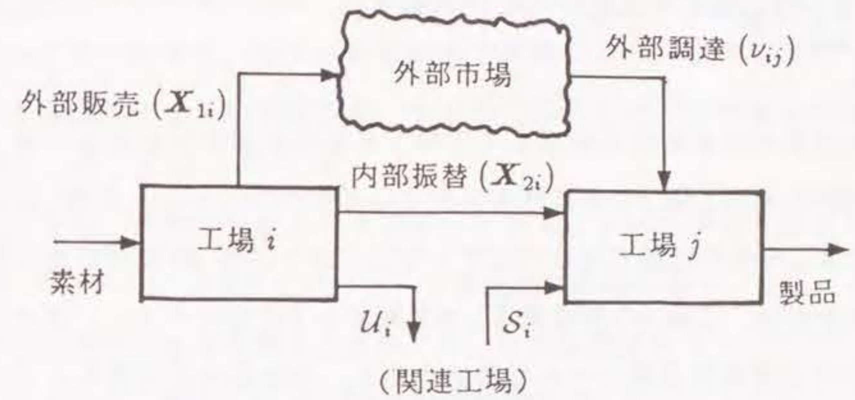


図 3.2 中間品の流れ

なる．これを生産するためには外部市場と関連工場から中間品と原材料を調達する必要がある．いま工場 iで生産される中間品を工場 jが外部市場で調達する量を$\boldsymbol{\nu}_{ij} \in \mathrm{R}^{m_j}$とし，工場 jで生産する製品と工場 iで生産する中間品に関する製品構成を行列 N_{ij}で表すと，工場 jが製品を生産するのに必要とする工場 iの中間品の量$\hat{\boldsymbol{w}}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$は次のようになる．

$$\hat{\boldsymbol{w}}_i = \sum_{j \in \mathcal{U}_i} \{N_{ij}(\boldsymbol{X}_{1j} + \boldsymbol{X}_{2j}) - \boldsymbol{\nu}_{ij}\} \tag{3.101}$$

ここに N_{ij}は $m_i \times m_j$行列である．他方，工場 iから供給される中間品の量は振替量$\boldsymbol{X}_{2i}$である．この工場 iが供給する中間品の量を$\check{\boldsymbol{w}}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$とすると，これは次のようになる．

$$\check{\boldsymbol{w}}_i = \boldsymbol{X}_{2i} \tag{3.102}$$

上式の$\hat{\boldsymbol{w}}_i$を要求量，$\check{\boldsymbol{w}}_i$を供給量と呼ぶことにする．

技術的相互関係はこの要求量と供給量が均衡していること，すなわち $\hat{\boldsymbol{w}}_i = \check{\boldsymbol{w}}_i$を意味する．すなわち，式 (3.101)，(3.102) より

$$\sum_{j \in \mathcal{U}_i} \{N_{ij}(\boldsymbol{X}_{1j} + \boldsymbol{X}_{2j}) - \boldsymbol{\nu}_{ij}\} = \boldsymbol{X}_{2i} \tag{3.103}$$

である．

この技術的相互関係を考慮して工場 i が生産計画を作成するとき，中間品を供給する工場 j の生産計画がすでに作成されており，工場 j による供給量 $\boldsymbol{X}_{2j}$ の値が既知でなければならない．逆に工場 j が生産計画を作成するためには，工場 i の要求量 $\boldsymbol{X}_{2i}$ が既知である必要がある．このように技術的相互関係を工場レベルで考慮すると，供給量と要求量が互いに既知でなければならないという矛盾点が存在する．他方，3.3 節と同様に工場は生産計画案の作成のみを行い，本部が生産計画案の選択を行うときに技術的相互関係を考慮するならば，本部では生産計画案を実行可能にする要求量と供給量は既知であるので，この矛盾点を解消することができる．

3.5.2 工場問題の設定

3.3 節では，資金や労働量，原材料などの資源をベクトル・パラメータとみなすことによって，工場の生産計画問題にマルチパラメトリック線形計画法の適用を可能とし，工場の生産計画案を得ることができることを示した．本節でも，関連工場から振り替えられる中間品を一種の資源とみなせば，前節と同様に展開することができる．すなわち，外部市場と関連工場による中間品の供給量 $\check{\boldsymbol{w}}_i$ をベクトルパラメータとみなせば，前節と同様に工場の生産計画案を得ることができる．

さらにそのような生産計画案において，どの程度の振替量の要求に応じることができるかを示すことができれば，各工場は相互関係にある他

の工場の生産計画に影響されることなく，自らの生産計画を作成することができる．これらのことより，本部から配分される資源と振り替えられる中間品の供給量に加えて，振り替え先の工場の要求量 $\hat{\boldsymbol{w}}_i$ もパラメータとして取り扱えば，ある生産計画案を実施するのに要する資源と，そのときに必要とする中間品の量，ならびに応じることのできる振替量を得ることができる．

本節では，前節の資源のベクトル・パラメータに振替量に関するベクトル・パラメータを加えたパラメータを制約式右辺に置く．これによって前節と同様の手続きを行うことができ，生産計画案を得ることができる．

このような工場 $i(=1,\cdots,N)$ の生産計画問題を次のように定式化する．

$$\text{Max. } z_i(\boldsymbol{X}_i) = \boldsymbol{c}_i^{\mathsf{T}} \boldsymbol{X}_i \tag{3.104}$$

$$\text{sub. to } F_{1i}\boldsymbol{X}_i \le \boldsymbol{d}_{1i} + E_{1i}\boldsymbol{b}_i \tag{3.105}$$

$$F_{2i}\boldsymbol{X}_i \le \boldsymbol{d}_{2i} \qquad + E_{2i}\hat{\boldsymbol{w}}_i \tag{3.106}$$

$$F_{3i}\boldsymbol{X}_i \le \boldsymbol{d}_{3i} \qquad\qquad + E_{3i}\check{\boldsymbol{w}}_i \tag{3.107}$$

$$\boldsymbol{X}_i \in S_i = \{\boldsymbol{X}_i \mid H_i\boldsymbol{X}_i \le \boldsymbol{d}_{4i}, \boldsymbol{X}_i \ge 0\} \tag{3.108}$$

ここで $\boldsymbol{X}_i = (\boldsymbol{X}_{1i}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{X}_{2i}^{\mathsf{T}}, \boldsymbol{\nu}_i^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$，$\boldsymbol{\nu}_i = (\boldsymbol{\nu}_{i1}^{\mathsf{T}}, \cdots, \boldsymbol{\nu}_{iN}^{\mathsf{T}})^{\mathsf{T}}$，$F_{1i}$: $p_{1i} \times 3m_i$行列，F_{2i}: $p_{2i} \times 3m_i$行列，F_{3i}: $p_{3i} \times 3m_i$行列，H_i: $p_{4i} \times 3m_i$行列である．上式においてベクトルと行列を次のように定義する．

$$\boldsymbol{d}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_{1i} \\ \boldsymbol{d}_{2i} \\ \boldsymbol{d}_{3i} \\ \boldsymbol{d}_{4i} \end{pmatrix}, \quad A_i = \begin{pmatrix} F_{1i} \\ F_{2i} \\ F_{3i} \\ H_i \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\theta}_i = \begin{pmatrix} \boldsymbol{b}_i \\ \hat{\boldsymbol{w}}_i \\ \check{\boldsymbol{w}}_i \end{pmatrix}, \quad D_i = \begin{pmatrix} E_{1i} & & 0 \\ & E_{2i} & \\ 0 & & E_{3i} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ & 0 & \end{pmatrix}$$

これらを用いて工場問題 (3.104)~(3.108) を書き換えると，次のようになる．

$$\text{Max. } z_i(\boldsymbol{X}_i) = \mathbf{c}_i^{\top}\boldsymbol{X}_i \tag{3.109}$$

$$\text{sub. to } A_i\boldsymbol{X}_i \le \boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{\theta}_i \tag{3.110}$$

$$\boldsymbol{X}_i \ge 0 \tag{3.111}$$

上のベクトルと行列の定義より，A_i: $(p_{1i} + p_{2i} + p_{3i}) \times 3m_i$行列，$D_i$: $(p_{1i}+p_{2i}+p_{3i}) \times (\ell+2m_i)$行列，$\boldsymbol{d}_i$: $(p_{1i}+p_{2i}+p_{3i})$ベクトル，$\boldsymbol{\theta}_i$: $\ell+2m_i$ベクトルである．上式は 3.3 節で定式化した工場問題と同じ形である．したがって$\boldsymbol{\theta}_i$をベクトル・パラメータとして 3.3 節と同様に行うと，技術的相互関係が存在する場合の生産計画案を次のように得ることができる．

$$\boldsymbol{X}_i^{(k_i)} = B_i^{(k_i)^{-1}}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{\theta}_i) = \boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + D_i^{(k_i)}\boldsymbol{\theta}_i \tag{3.112}$$

$$\begin{aligned} z_i^{(k_i)}(\boldsymbol{\theta}_i) &= \mathbf{c}_{B_i}^{\top} B_i^{(k_i)^{-1}}(\boldsymbol{d}_i + D_i\boldsymbol{\theta}_i) \\ &= z_{\max_i}^{(k_i)} + \mathbf{c}_i^{(k_i)^{\top}}\boldsymbol{\theta}_i \end{aligned} \tag{3.113}$$

$$R_i^{(k_i)} = \{\boldsymbol{\theta}_i \mid \boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + D_i^{(k_i)}\boldsymbol{\theta}_i \ge 0\} \tag{3.114}$$

ここで，$\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} = B_i^{(k_i)^{-1}}\boldsymbol{d}_i$, $D_i^{(k_i)} = B_i^{(k_i)^{-1}}D_i$, $z_{\max_i}^{(k_i)} = \mathbf{c}_{B_i}^{\top}B_i^{(k_i)^{-1}}\boldsymbol{d}_i$, $\mathbf{c}_i^{(k_i)} = \mathbf{c}_{B_i}^{\top}B_i^{(k_i)^{-1}}D_i$, $k_i = 1, \cdots, K_i$である．

工場問題 (3.109)~(3.111) が最適解を持つような$\boldsymbol{\theta}_i$の全領域を式 (3.33) と同様に

$$M_i = \bigcup_{k_i=1}^{K_i} R^{(k_i)} \tag{3.115}$$

で定義する．この M_i上で定義される工場の目的関数は次のようである．

$$z_i^0(\boldsymbol{\theta}_i) = \begin{cases} z_i^{(1_i)}(\boldsymbol{\theta}_i) = z_{\max_i}^{(1_i)} + \mathbf{c}_i^{(1_i)^{\top}}\boldsymbol{\theta}_i, & \boldsymbol{\theta}_i \in R_i^{(1_i)} \\ z_i^{(2_i)}(\boldsymbol{\theta}_i) = z_{\max_i}^{(2_i)} + \mathbf{c}_i^{(2_i)^{\top}}\boldsymbol{\theta}_i, & \boldsymbol{\theta}_i \in R_i^{(2_i)} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \quad\vdots \\ z_i^{(K_i)}(\boldsymbol{\theta}_i) = z_{\max_i}^{(K_i)} + \mathbf{c}_i^{(K_i)^{\top}}\boldsymbol{\theta}_i, & \boldsymbol{\theta}_i \in R_i^{(K_i)} \end{cases} \tag{3.116}$$

以後の展開を容易にするために生産量と振替量を次のように表すことにする．

$$\boldsymbol{X}_{1i}^{(k_i)} = {}^1\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + {}^1D_i^{(k_i)}\boldsymbol{\theta}_i \tag{3.117}$$

$$\boldsymbol{X}_{2i}^{(k_i)} = {}^2\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + {}^2D_i^{(k_i)}\boldsymbol{\theta}_i \tag{3.118}$$

$$\boldsymbol{\nu}_i^{(k_i)} = {}^3\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + {}^3D_i^{(k_i)}\boldsymbol{\theta}_i \tag{3.119}$$

3.5.3 本部問題の設定と最適化

本節で取り扱う本部問題は，3.3 節で設定した問題と同じものであるとする．これは次のようである．

$$\text{Max. } Z = \sum_{i=1}^{N} z_i(\boldsymbol{X}_i) - \boldsymbol{C}_b^{\top}\boldsymbol{b} \tag{3.120}$$

$$\text{sub. to } G_b\boldsymbol{b} \le \boldsymbol{b}_0 \tag{3.121}$$

$$\boldsymbol{b} \ge 0 \tag{3.122}$$

ここで$\boldsymbol{C}_b \in \mathrm{R}^{N\ell}$: 資源の配分に関する費用係数，$G_b$: 資源配分に関する$\ell \times N\ell$行列である．この問題を式 (3.112)~(3.114) を考慮して，次のように書き換える．

$$\text{Max. } Z^0(\boldsymbol{\theta}) = \sum_{i=1}^{N} z_i^0(\boldsymbol{\theta}_i) - \boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{\theta} \tag{3.123}$$

$$\text{sub. to } G\boldsymbol{\theta} \le \boldsymbol{b}_0 \tag{3.124}$$

$$\boldsymbol{\theta}_i \in M_i, i = 1, \cdots, N \tag{3.125}$$

ここで$\boldsymbol{\theta}^{\top} = (\boldsymbol{\theta}_1, \cdots, \boldsymbol{\theta}_N)$, $\boldsymbol{C}^{\top} = (\boldsymbol{C}_{b_1}, 0, 0, \boldsymbol{C}_{b_2}, 0, 0, \cdots, \boldsymbol{C}_{b_N}, 0, 0)$, $G = (G_{b1}, 0, 0, G_{b2}, 0, 0, \cdots, G_{bN}, 0, 0)$で, $\boldsymbol{C}_{bi} \in \mathrm{R}^{\ell}$は$\boldsymbol{b}_i$に関する$\boldsymbol{C}_b$の部分ベクトル, G_{bi}は$\boldsymbol{b}_i$に関するG_bの$\ell \times \ell$部分行列, $\boldsymbol{\theta}$と$\boldsymbol{C}$は$\sum_{i=1}^{N}(\ell + 2m_i)$ベクトル, Gは$\ell \times \sum_{i=1}^{N}(\ell + 2m_i)$行列である.

3.3節の式(3.39), (3.41)と同様に, ω_{ξ}と$Z_{\xi}(\boldsymbol{\theta})$を次のように定義する.

$$\omega_{\xi} = \bigcap_{i=1}^{N} R_i^{(\hat{k}_i)} \bigcap \{\boldsymbol{\theta} \mid G\boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{b}_0, \boldsymbol{\theta} \geq 0\}, \hat{k}_i \in \Lambda_{\xi}, \xi = 1, \cdots, J \quad (3.126)$$

および

$$\begin{aligned} Z_{\xi}(\boldsymbol{\theta}) &= \sum_{i=1}^{N} z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{\theta}_i) - \boldsymbol{C}^{\top}\boldsymbol{\theta} \\ &= \sum_{i=1}^{N}(z_{\max_i}^{(\hat{k}_i)} + \boldsymbol{c}_i^{(\hat{k}_i)\top}\boldsymbol{\theta}_i) - \sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{C}_i^{\top}\boldsymbol{\theta}_i \\ &= \sum_{i=1}^{N} z_{\max_i}^{(\hat{k}_i)} + \sum_{i=1}^{N}(\boldsymbol{c}_i^{(\hat{k}_i)} - \boldsymbol{C}_i)^{\top}\boldsymbol{\theta}_i \\ &= Z_{\max}^{(\xi)} + \boldsymbol{C}^{(\xi)\top}\boldsymbol{\theta}, \hat{k}_i \in \Lambda_{\xi} \end{aligned} \quad (3.127)$$

以上の展開を基にして, 工場間に技術的相互関係が存在する場合の本部問題を考える. 前項でこの技術的相互関係は本部で取り扱うこととした. 工場間の技術的相互関係は要求量と供給量が均衡していること, すなわち$\hat{\boldsymbol{w}}_i = \check{\boldsymbol{w}}_i$である. しかしながら, これだけでは工場のどの計画案が相互関係に関係しているのか明確でなく, 供給量$\check{\boldsymbol{w}}_i$を満たしている振替量と外部市場での調達量の割合が明らかでない. そこで式(3.103)で表わした相互関係式を用いれば, これらの関係を明らかにすることができる. これを行うには, 式(3.103)をベクトル・パラメータ$\boldsymbol{\theta}$で表す必要がある. 各工場の任意の生産計画案について, 式(3.112)あるいは式(3.117), (3.118)で表わされる生産計画を用いて, 式(3.103)を次のように書き換える.

式(3.103)左辺

$$\begin{aligned} &= \sum_{j \in \mathcal{U}_i} \{N_{ij}(\boldsymbol{X}_{1j} + \boldsymbol{X}_{2j}) - \boldsymbol{\nu}_{ij}\} \\ &= \sum_{j \in \mathcal{U}_i} N_{ij}({}^1\boldsymbol{d}_j^{(k_j)} + {}^2\boldsymbol{d}_j^{(k_j)} - {}^3\boldsymbol{d}_j^{(k_j)}) \\ &\quad + \sum_{j \in \mathcal{U}_i} N_{ij}({}^1D_j^{(k_j)} + {}^2D_j^{(k_j)} - {}^3D_j^{(k_j)})\boldsymbol{\theta}_j \end{aligned} \quad (3.128)$$

式(3.103)右辺

$$\begin{aligned} &= \boldsymbol{X}_{2i} \\ &= {}^2\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + {}^2D_i^{(k_i)}\boldsymbol{\theta}_i \end{aligned} \quad (3.129)$$

上式より技術的相互関係式は,

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in \mathcal{U}_i} N_{ij}({}^1\boldsymbol{d}_j^{(k_j)} + {}^2\boldsymbol{d}_j^{(k_j)} - {}^3\boldsymbol{d}_j^{(k_j)}) \\ &+ \sum_{j \in \mathcal{U}_i} N_{ij}({}^1D_j^{(k_j)} + {}^2D_j^{(k_j)} - {}^3D_j^{(k_j)})\boldsymbol{\theta}_j \\ &= {}^2\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} + {}^2D_i^{(k_i)}\boldsymbol{\theta}_i \end{aligned}$$

となる. これを整理し, 次のように表す.

$$W_{ij}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{v}_i \quad (3.130)$$

ここでW_{ij}はj列とi列がそれぞれ$\sum_{j \in \mathcal{U}_i} N_{ij}({}^1D_j^{(k_j)} + {}^2D_j^{(k_j)} - {}^3D_j^{(k_j)})$, $-{}^2D_i^{(k_i)}$であるような$m_i \times (\ell + 2m_i)$行列, $\boldsymbol{v}_i = {}^2\boldsymbol{d}_i^{(k_i)} - \sum_{j \in \mathcal{U}_i} N_{ij}({}^1\boldsymbol{d}_j^{(k_j)} + {}^2\boldsymbol{d}_j^{(k_j)} - {}^3\boldsymbol{d}_j^{(k_j)})$である$m_i$ベクトルである.

したがって, 技術的相互関係を考慮したときのω_{ξ}^0は

$$\omega_{\xi}^0 = \omega_{\xi} \bigcap \{\boldsymbol{\theta} \mid W_{ij}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{v}_i\} \quad (3.131)$$

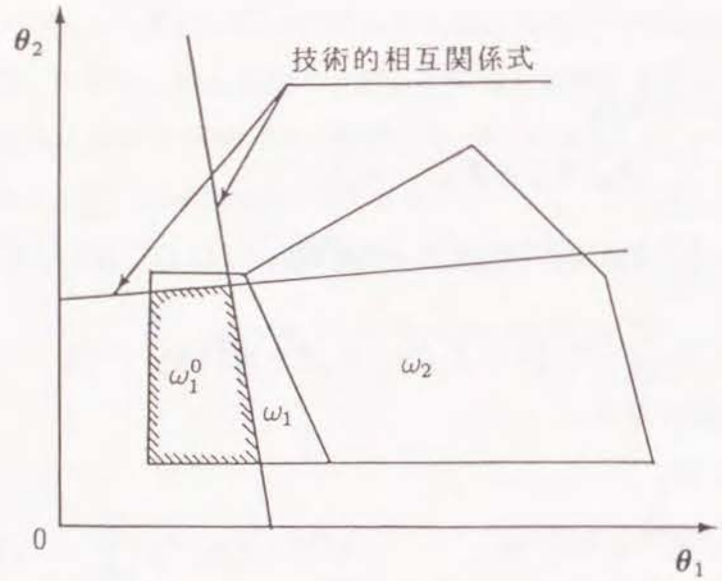


図 3.3 技術的相互関係による制約

となる．定義 3.3でω_ξの隣接領域を定義したが，式 (3.131) で定義したω_ξ^0は図 3.3のように $W_{ij}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{v}_i$によって制約される場合があり，必ずしも他の$\omega_{\xi'}^0$と隣接することはない．3.3節で提案したアルゴリズムはω_ξが隣接していることを利用して劣勾配$\boldsymbol{\rho}_i$が増加する方向に $R_i^{(k_i)}$を探索するものであった．技術的相互関係が存在する場合，ω_ξ^0は必ずしも隣接しないのでこのような方法は適用できない．

そこで本節の技術的相互関係が存在する場合では，3.3節の場合と同様に $R_i^{(k_i)}$を探索していくためにω_ξを利用し，ステップ2で本部問題を解く際に技術的相互関係式 (3.130) を考慮する．すなわち，ステップ2の本部問題を次のように書き換える．

$$\text{Max. } Z_\xi(\boldsymbol{\theta}) \tag{3.132}$$

$$\text{sub. to } G\boldsymbol{\theta} \leq \boldsymbol{b}_0 \tag{3.133}$$

$$-D_i^{(k_i)}\boldsymbol{\theta}_i \leq \boldsymbol{d}_i^{(k_i)}, k_i \in \Lambda_\xi, i = 1, \cdots, N \tag{3.134}$$

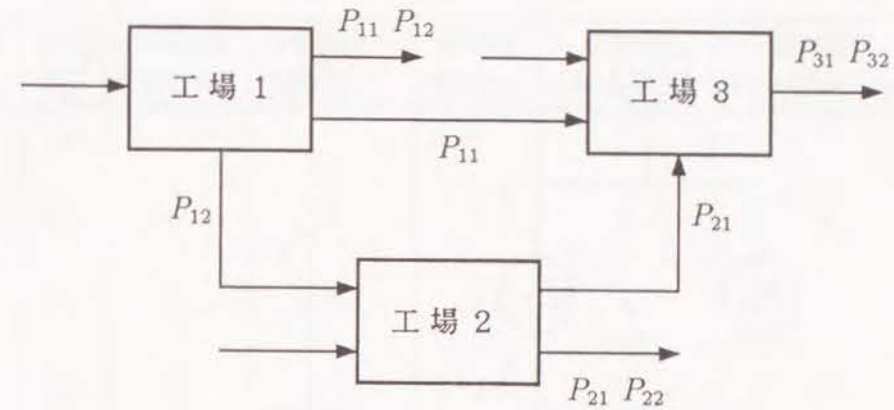


図 3.4 3工場のマクロ・モデル

$$W_{ij}\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{v}_i, i = 1, \cdots, N \tag{3.135}$$

$$\boldsymbol{\theta} \geq 0 \tag{3.136}$$

3.5.4 数値計算例

数値計算例として，図 3.4に示す次のような技術的相互関係が存在するマクロ・モデルを考える．

(1) 工場数を3（$N = 3$）とする ($i = 1, 2, 3$)．

(2) 本部が工場に配分する資源は労働力のみであるとする．

(3) 各工場では図 3.5に示す製品構成を持つ品物を生産している．図中の線に添えている数字は中間品の使用個数である．工場1は2種類の中間品 $\mathrm{P}_{1\ell}$，$\ell = 1, 2 (m_1 = 2)$ を生産し，工場2は中間品 P_{21}と製品 $\mathrm{P}_{22}, (m_i = 2)$ を，工場3は製品 $\mathrm{P}_{3\ell}$，$\ell = 1, 2 (m_i = 2)$ を生産している．中間品 P_{11}と P_{12}および製品 P_{32}は素材を加工することによって完成品になるが，中間

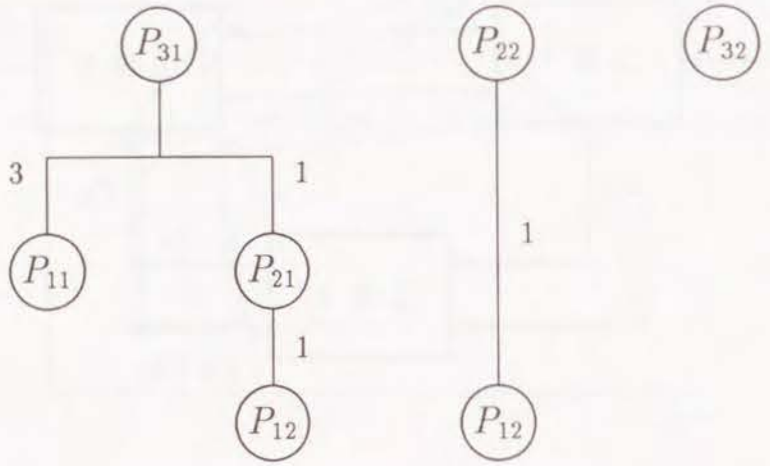


図 3.5 製品構成

品 P_{21}と製品 P_{22}, P_{31}は，工場 1 と工場 2，および外部市場から調達した中間品 P_{11}, P_{12}, P_{21}を用いて生産される．

(4)上記の生産量に関して，工場 i が品物を外部市場へ販売する量を $X_{1i\ell}$, 振り替える量を $X_{2i\ell}$で表す．また工場 i が工場 j で生産される中間品を外部市場で調達するときの調達量を $\nu_{(i\ell)j}$で表す ($\ell = 1,\cdots,m_i$, $j \in \mathcal{U}_i$, $i = 1,\cdots,N$)

(5) 本部の評価基準は，3.3 節と同様に各工場の利益の総和から資源配分に要する費用を差し引いたものであるとする．

計算に必要なデータを表 3.9 に示す．本部が資源配分に要する費用は，5 千円/man-h で，配分可能な労働力は 172,900man-h である．各工場の原材料の利用可能量と生産設備利用可能時間は，工場 1 では 16,000kg，40,000machine-h，工場 2 では 22,000kg，29,600machine-h，工場 3 では

表 3.9 数値計算用データ

工場 i	製品 P_{ij}	販売価格 (万円/pc)	振替価格 (万円/pc)	原材料 (kg/pc)	労働量 (man-h/pc)	設備能力 (machine-h/pc)
1	P_{11}	4	3	2	7	8
	P_{12}	9	6	5	6	5
2	P_{21}	13	8	3	4	8
	P_{22}	12	-	2	7	3
3	P_{31}	13	-	3	5	6
	P_{32}	5	-	4	4	5

24,000kg，33,000machine-h である．

数値計算例の前提条件 (3) より

$$\mathcal{S}_1 = \{\phi\} \quad \mathcal{S}_2 = \{1\} \quad \mathcal{S}_3 = \{1,2\}$$
$$\mathcal{U}_1 = \{2,3\} \quad \mathcal{U}_2 = \{3\} \quad \mathcal{U}_3 = \{\phi\}$$

である．これより要求量は次のようになる．

$$\begin{aligned}
\begin{bmatrix} \hat{w}_{11} \\ \hat{w}_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{121} + X_{221} \\ X_{122} + X_{222} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_{(11)2} \\ \nu_{(12)2} \end{bmatrix} \\
&+ \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{131} + X_{231} \\ X_{132} + X_{232} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_{(11)3} \\ \nu_{(12)3} \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3(X_{131} + X_{231}) \\ X_{121} + X_{221} + X_{122} + X_{222} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_{(11)2} \\ \nu_{(12)2} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_{(11)3} \\ \nu_{(12)3} \end{bmatrix} \\
\begin{bmatrix} \hat{w}_{21} \\ \hat{w}_{22} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_{131} + X_{231} \\ X_{132} + X_{232} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_{(21)3} \\ \nu_{(22)3} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

$$
= \begin{bmatrix} X_{131} + X_{231} \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \nu_{(21)3} \\ \nu_{(22)3} \end{bmatrix}
$$

他方，供給量は

$$
\begin{bmatrix} \breve{w}_{11} \\ \breve{w}_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{211} \\ X_{212} \end{bmatrix}
$$

$$
\begin{bmatrix} \breve{w}_{21} \\ \breve{w}_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{221} \\ X_{222} \end{bmatrix}
$$

以上より技術的相互関係式は次のようになる．

$$
\begin{bmatrix} 3(X_{131} + X_{231}) - \nu_{(11)2} - \nu_{(11)3} \\ X_{121} + X_{221} + X_{122} + X_{222} - \nu_{(12)2} - \nu_{(12)3} \\ X_{131} + X_{231} - \nu_{(21)3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X_{211} \\ X_{212} \\ X_{221} \end{bmatrix}
$$

労働量の初期配分を $\hat{b}_1 = 22,000$，$\hat{b}_2 = 30,800$，$\hat{b}_3 = 20,100$ としたとき，工場問題は次のようになる．

<工場 1 >

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } z_1 &= 4X_{111} + 3X_{211} + 9X_{112} + 6X_{212} \\
\text{sub. to } \; & 2(X_{111} + X_{211}) + 5(X_{112} + X_{212}) \leq 16,000 \\
& 7(X_{111} + X_{211}) + 6(X_{112} + X_{212}) \leq 22,000 + b_1 \\
& 8(X_{111} + X_{211}) + 5(X_{112} + X_{212}) \leq 40,000 \\
& X_{211} \geq \hat{w}_{11} \\
& X_{212} \geq \hat{w}_{12} \\
& X_{111}, X_{211}, X_{112}, X_{212} \geq 0
\end{aligned}
$$

<工場 2 >

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } z_2 &= 10X_{121} + 8X_{221} + 12X_{122} \\
& \quad -9\nu_{(12)2} - 6(X_{121} + X_{221} + X_{122}) \\
\text{sub. to } \; & 3(X_{121} + X_{221}) + 2X_{122} \leq 22,000 \\
& 4(X_{121} + X_{221}) + 7X_{122} \leq 30,800 + b_2 \\
& 8(X_{121} + X_{221}) + 3X_{122} \leq 29,600 \\
& X_{221} \geq \hat{w}_{21} \\
& X_{121} + X_{221} + X_{122} - \nu_{(12)2} \leq \breve{w}_{12} \\
& X_{121}, X_{221}, X_{122}, \nu_{(12)2} \geq 0
\end{aligned}
$$

<工場 3 >

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } z_3 &= 13X_{131} + 5X_{132} \\
& \quad -4\nu_{(11)3} - 10\nu_{(21)3} - 3(X_{131} + X_{132}) \\
\text{sub. to } \; & 3X_{131} + 4X_{132} \leq 24,000 \\
& 5X_{131} + 4X_{132} \leq 20,100 + b_3 \\
& 6X_{131} + 5X_{132} \leq 33,000 \\
& 3X_{131} - \nu_{(11)3} \leq \breve{w}_{11} \\
& X_{131} - \nu_{(21)3} \leq \breve{w}_{21} \\
& X_{131}, X_{132}, \nu_{(11)3}, \nu_{(21)3} \geq 0
\end{aligned}
$$

<本部問題>

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } Z &= z_1(X^*_{111}, X^*_{211}, X^*_{112}, X^*_{212}) + z_2(X^*_{121}, X^*_{221}, X^*_{122}, X^*_{222}) \\
& \quad + z_3(X^*_{131}, X^*_{231}, X^*_{132}, X^*_{232}) - 0.5(b_1 + b_2 + b_3) \\
\text{sub. to } \; & b_1 + b_2 + b_3 \leq 172,900 \\
& 3X^*_{131} - \nu^*_{(11)2} - \nu^*_{(11)3} = X^*_{211} \\
& X^*_{121} + X^*_{221} + X^*_{122} + X^*_{222} - \nu^*_{(12)2} - \nu^*_{(12)3} = X^*_{212}
\end{aligned}
$$

$$X^*_{131} \qquad\qquad - \nu^*_{(21)3} = X^*_{221}$$

$$b_1, b_2, b_3 \geq 0$$

本部問題を式 (3.132)～(3.136) に置き換えたアルゴリズムに基づいて，この数値計算例を解くと以下のようになる．

ステップ 1 ：各工場問題を解くと，表 3.10 に示すパラメトリック分析の第 1 表を得た．この表に基づいて各工場の生産計画案を作成すると次のようになる．

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_1^{(1_1)} &= \{X_{111}^{(1_1)} = 608.70 + 0.22b_1, X_{211}^{(1_1)} = 0.00, \\
&\quad X_{112}^{(1_1)} = \hat{w}_{12}, X_{212}^{(1_1)} = 2,956.52 - 0.09b_1 - \hat{w}_{12} \\
&\quad z_1^{(1_1)} = 20,173.92 + 0.35b_1 + 3.00\hat{w}_{12} \\
&\quad R_1^{(1_1)} = \{(b_1, \hat{w}_{11}, \hat{w}_{12}) \mid 0.09b_1 + \hat{w}_{12} \leq \ 2,956.52, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad b_1 \leq 15,652.18\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_2^{(1_2)} &= \{X_{121}^{(1_2)} = \check{w}_{12}, X_{221}^{(1_2)} = 0.00, X_{122}^{(1_2)} = 0.00, \nu_{(12)2}^{(1_2)} = 0.00 \\
&\quad z_2^{(1_2)} = 6.00\check{w}_{12} \\
&\quad R_2^{(1_2)} = \{(b_2, \hat{w}_{21}, \check{w}_{12}) \mid -b_2 + 4.00\check{w}_{12} \leq 30,800.00, \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \check{w}_{12} \leq \ 3,700.00\}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_3^{(1_3)} &= \{X_{131}^{(1_3)} = \check{w}_{11}, X_{132}^{(1_3)} = 5,025.00 + 0.25b_3 - 0.42\check{w}_{11}, \\
&\quad \nu_{(11)3}^{(1_3)} = 0.00, \nu_{(21)3}^{(1_3)} = 0.00 \\
&\quad z_3^{(1_3)} = 10,050.00 + 0.50b_3 - 2.50\check{w}_{11} \\
&\quad R_3^{(1_3)} = \{(b_3, \check{w}_{11}, \check{w}_{21}) \mid \ 1.25b_3 - 0.08\check{w}_{11} \leq 7,875.00, \\
&\qquad\qquad -0.25b_3 + 0.42\check{w}_{11} \leq 5,025.00, \\
&\qquad\qquad b_3 - 0.67\check{w}_{11} \leq 3,900.00\}\}
\end{aligned}$$

表 3.10 シンプレックス表（パラメトリック分析）

工場 1

基底	X_{111}	X_{211}	X_{112}	X_{212}	X_{113}	X_{114}	X_{115}	X_{116}	X_{117}	z_1	b_1	$\hat{w}_{11}$	$\hat{w}_{12}$
X_{212}	0.00	0.00	0.00	1.00	0.30	−0.09	0.00	0.00	−1.00	2956.52	−0.09	0.00	−1.00
X_{111}	1.00	1.00	0.00	0.00	−0.26	0.22	0.00	0.00	0.00	608.70	0.22	0.00	0.00
X_{115}	0.00	0.00	0.00	0.00	0.57	−1.30	1.00	0.00	0.00	20347.83	−1.30	0.00	0.00
X_{116}	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
X_{112}	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	0.00	1.00	0.00	0.00	0.78	0.35	0.00	0.00	3.00	20173.92	0.35	0.00	3.00

工場 2

基底	X_{121}	X_{221}	X_{122}	$\nu_{(12)2}$	X_{123}	X_{124}	X_{125}	X_{126}	X_{127}	z_2	b_2	$\hat{w}_{21}$	$\check{w}_{12}$
X_{123}	1.00	1.00	0.00	2.00	1.00	0.00	0.00	0.00	−2.00	22, 000.00	0.00	0.00	−2.00
X_{124}	−3.00	−3.00	0.00	7.00	0.00	1.00	0.00	0.00	−7.00	30, 800.00	1.00	0.00	−7.00
X_{125}	5.00	5.00	0.00	3.00	0.00	0.00	1.00	0.00	−3.00	29, 600.00	0.00	0.00	−3.00
X_{126}	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00
X_{122}	1.00	1.00	1.00	−1.00	0.00	0.00	0.00	0.00	1.00	0.00	0.00	0.00	1.00
	2.00	4.00	0.00	3.00	0.00	0.00	0.00	0.00	6.00	0.00	0.00	0.00	6.00

工場 3

基底	X_{131}	X_{132}	$\nu_{(11)3}$	$\nu_{(21)3}$	X_{133}	X_{134}	X_{135}	X_{136}	X_{137}	z_3	b_3	$\check{w}_{11}$	$\check{w}_{21}$
X_{133}	0.00	0.00	−0.67	0.00	1.00	−1.00	0.00	0.67	0.00	39, 000.00	−1.00	0.67	0.00
X_{132}	0.00	1.00	0.42	0.00	0.00	0.25	0.00	−0.42	0.00	5, 025.00	0.25	−0.42	0.00
X_{135}	0.00	0.00	−0.08	0.00	0.00	−1.25	1.00	0.08	0.00	7, 875.00	−1.25	0.08	0.00
X_{131}	1.00	0.00	−0.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00
X_{137}	0.00	0.00	0.33	−1.00	0.00	0.00	0.00	−0.33	1.00	0.00	0.00	−0.33	1.00
	0.00	0.00	1.50	10.00	0.00	0.50	0.00	2.50	0.00	0.00	0.00	2.50	0.00

各工場の計画実施領域 $R_i^{(1_i)}$, $i=1,2,3$ はそれぞれ次のようである．

$$
\begin{aligned}
R_1^{(1_1)} = & \{(b_1, \hat{w}_{11}, \hat{w}_{12}) \mid & 0.09b_1 + \hat{w}_{12} \le & \ 2,956.52, \\
& & b_1 \le & \ 15,652.18\} \\
R_2^{(1_2)} = & \{(b_2, \hat{w}_{21}, \check{w}_{12}) \mid & \check{w}_{12} \le & \ 3,700.00, \\
& & -b_2 + 4.00\check{w}_{12} \le & \ 30,800.00\} \\
R_3^{(1_3)} = & \{(b_3, \check{w}_{11}, \check{w}_{21}) \mid & 1.25b_3 - 0.08\check{w}_{11} \le & \ 7,875.00, \\
& & -0.25b_3 + 0.42\check{w}_{11} \le & \ 5,025.00, \\
& & b_3 - 0.67\check{w}_{11} \le & \ 3,900.00\}
\end{aligned}
$$

ステップ２：$\xi = 1$

計画実施領域の組合せω_1は次のようになる．

$$
\begin{aligned}
\omega_1 = \{(b_1, b_2, b_3, \hat{w}_{11}, \hat{w}_{12}, \hat{w}_{21}, \check{w}_{11}, \check{w}_{12}, \check{w}_{21}) \mid & \\
b_1 + b_2 + b_3 \le & \ 172,900.00 \\
0.09b_1 + \qquad \hat{w}_{12} \le & \ 2,956.52 \\
-b_2 + 4.00\check{w}_{12} \le & \ 30,800.00 \\
1.25b_3 - 0.08\check{w}_{11} \le & \ 7,875.00 \\
-0.25b_3 + 0.42\check{w}_{11} \le & \ 5,025.00 \\
b_3 - 0.67\check{w}_{11} \le & \ 3,900.00 \\
-0.33\check{w}_{11} + \check{w}_{21} \ge & \ 0.00 \\
b_1 \le 15,600, \check{w}_{12} \le & \ 3,700.00\}
\end{aligned}
$$

技術的相互関係を考慮したω_1^0は

$$\omega_1^0 = \omega_1 \cap \{\check{w}_{11} = 0, -0.09b_1 + \check{w}_{12} + \hat{w}_{12} = 2,956.52\}$$

である．このときの工場の目的関数は，

$$
\begin{aligned}
z_1^{(1_1)} &= 20,173.92 + 0.34b_1 + 3.00\hat{w}_{12}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
z_2^{(1_2)} &= 7.00\check{w}_{12} \\
z_3^{(1_3)} &= 10,650.00 + 0.50b_3 - 2.50\check{w}_{11}
\end{aligned}
$$

である．これより本部目的関数を求めると，

$$Z_1 = -0.16b_1 - 0.50b_2 - 2.50\check{w}_{11} + 7.00\check{w}_{12} + 3.00\hat{w}_{12} + 30,224.00$$

となる．したがって，本問題は次のようである．

$$
\begin{aligned}
\text{Max. } Z_1 = & -0.16b_1 - 0.50b_2 \\
& -2.50\check{w}_{11} + 7.00\check{w}_{12} + 3.00\hat{w}_{12} + 30,224.00 \\
\text{sub. to} \qquad & b_1 + b_2 + b_3 \le 172,900.00 \\
& 0.09b_1 + \qquad \hat{w}_{12} \le \ 2,956.52 \\
& -b_2 + 4.00\check{w}_{12} \le \ 30,800.00 \\
& 1.25b_3 - 0.08\check{w}_{11} \le \ 7,875.00 \\
& -0.25b_3 + 0.42\check{w}_{11} \le \ 5,025.00 \\
& b_3 - 0.67\check{w}_{11} \le \ 3,900.00 \\
& -0.33\check{w}_{11} + \check{w}_{21} \ge 0.00 \\
& b_1 \le 15,600.00, \check{w}_{12} \le \ 3,700.00 \\
& -0.09b_1 + \check{w}_{12} + \hat{w}_{12} = \ 2,956.52 \\
& \check{w}_{11} = 0.00
\end{aligned}
$$

これを解くと，$b_1 = 0.00$，$b_2 = 0.00$，$b_3 = 0.00$，$\check{w}_{11} = 0.00$，$\check{w}_{12} = 0.00$，$\check{w}_{21} = 2,956.25$，$\hat{w}_{11} = 0.00$，$\hat{w}_{12} = 0.00$，$\hat{w}_{21} = 0.00$，$Z_1 = 50,919.64$ を得る．

ステップ３：ω_1に隣接する $R_i^{(2_i)}$を求める．そのためにステップ２の本部問題の制約条件の中で等号で成り立つ制約条件式を探すと，工場３の

表 3.11 シンプレックス表（パラメトリック分析）

工場 3

基底	X_{131}	X_{132}	$\nu_{(11)3}$	$\nu_{(21)3}$	X_{133}	X_{134}	X_{135}	X_{136}	X_{137}	z_3	b_3	$\check{w}_{11}$	$\check{w}_{21}$
X_{133}	0.00	0.00	−0.67	0.00	1.00	−1.00	0.00	0.67	0.00	39,000.00	−1.00	0.67	0.00
X_{132}	0.00	1.00	0.42	0.00	0.00	0.25	0.00	−0.42	0.00	5,025.00	0.25	−0.42	0.00
X_{135}	0.00	0.00	−0.08	0.00	0.00	−1.25	1.00	0.08	0.00	7,875.00	−1.25	0.08	0.00
X_{131}	1.00	0.00	−0.33	0.00	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00	0.00	0.00	0.33	0.00
X_{137}	0.00	0.00	0.33	−1.00	0.00	0.00	0.00	−0.33	1.00	0.00	0.00	−0.33	1.00
	0.00	0.00	1.50	10.00	0.00	0.50	0.00	2.50	0.00	0.00	0.00	2.50	0.00

制約条件式

$$-0.33\check{w}_{11} + \check{w}_{21} \geq 0.00$$

のみである．したがって，$I_1^{(1_1)} = \{\phi\}$，$I_2^{(1_2)} = \{\phi\}$，$I_3^{(1_3)} = \{4\}$となる．上式を境界とする$R_3^{(2_3)}$を見つけるために，表 3.10 における工場 3 のシンプレックス表のパラメトリック分析を行い新しい表を求めると表 3.11 を得た．その結果，$\check{w}_{11}$に関する劣勾配が $2.50 \geq 0$ であるので，本部目的関数を改良できる可能性がある．ステップ 4 へいく．

ステップ 4 ：ω_1に隣接する工場 3 の計画実施領域は

$$R_3^{(2_3)} = \{(b_3, \check{w}_{11}, \check{w}_{21}) \mid b_3 \leq 3,900.00, \check{w}_{11} \leq 0, \check{w}_{21} \leq 0\}$$

である．$\xi \leftarrow 2$，$k_3 \leftarrow 2$とし，ステップ 2 へいく．

ステップ 2 ：この計画実施領域を制約条件とする本部問題は実行不可能となる．計算を終了する．

上記の計算の結果，最適な資源配分量は労働量:$b_1^* = 0.00$(man-h)，$b_2^* = 0.00$(man-h)，$b_3^* = 0.00$(man-h)

となり，システム全体の総利益は

$$Z^* = 50,919.64(\text{万円})$$

である．このときの各工場の最適な生産計画と工場利益は，それぞれ次のようになる．

工場 1：

$$X_{111}^* = 608.70 \doteqdot 609(\text{pc}),\ X_{211}^* = 0(\text{pc}),$$
$$X_{112}^* = 0(\text{pc}),\ X_{212}^* = 2,956.52 \doteqdot 2,957(\text{pc}),$$
$$z_1^* = 20,173.92(\text{万円})$$

工場 2：

$$X_{121}^* = 2,956.52 \doteqdot 2957(\text{pc}),\ X_{221}^* = 0(\text{pc}),$$
$$X_{122}^* = 0(\text{pc}),\ X_{222}^* = 0(\text{pc}),\ \nu_{(12)2}^* = 0(\text{pc})$$
$$z_2^* = 20,695.64(\text{万円})$$

工場 3：

$$X_{131}^* = 0(\text{pc}),$$
$$X_{132}^* = 5,025(\text{pc}),$$
$$\nu_{(11)3}^* = 0(\text{pc}),\ \nu_{(21)3}^* = 0(\text{pc})$$
$$z_3^* = 10,050(\text{万円})$$

3.6 結 言

本章では，分権的生産システムのマクロ・モデルを資源配分による統合問題として定式化を行い，その最適化解析を行った結果，以下の結論

を得た．

(1) 1つの本部といくつかの工場で構成される2階層分権的生産システムのマクロ・モデルを対象に，分割原理に基づいた資源配分による統合法の妥当性を検討し，本研究で対象としている分権的生産システムに適用することは困難であることを示した．

(2) 本研究で提案する「資源配分による統合」に基づくマクロ・モデルを定式化し，モデルが線形モデルである場合について最適化解析を行い，工場問題の目的関数と実行可能領域を資源に関して陽的に得ることができることを示した．

(3) 工場問題を解く際に得ることのできる資源に関する双対変数がシステム全体の最適化を達成する時に用いる劣勾配であることを明らかにし，それに基づく解法を示した．

(4) マクロ・モデルを2次計画モデルに拡張し，線形モデルの最適化解析によって得た結果が適用できることを明らかにした．

(5) 線形モデルを工場間に技術的相互関係が存在する場合に拡張し，技術的相互関係式を導いた．本部がこの技術的相互関係式を取り扱うことの妥当性を明らかにし，本部問題を修正することによって線形モデルで提案した解法が適用できることを示した．

(6) これらのことを数値計算例を用いて，解析の有効性を示した．

参考文献

[1] 茨木俊秀：資源配分問題—計算の複雑さの立場から—．オペレーションズ・リサーチ Vol.25, No.12, pp.756–764，1980．

[2] 青木茂男：事業部制会計．税務経理協会，1979．

[3] 福島雅夫：非線形最適化の理論．産業図書，1980．

[4] 門田安弘：振替価格と利益配分の基礎．同文舘，1989．

[5] 門田安弘：振替価格と利益配分の展開．同文舘，1991．

[6] 鈴木康彦：線形計画法におけるいくつかの分割原理について．オペレーションズ・リサーチ Vol.21, No.2, pp.704–710，1976．

[7] G.B. Dantzig and P. Wolfe : Decomposition principle for linear programs. *Operations Research* Vol.8, No.1, pp.101–111, 1960.

[8] Y.M.I. Dirickx and L.P. Jennergren : *Systems Analysis by Multilevel Methods.* John-Wiley & Sons, 1979.

[9] H. Enzer : The static theory of transfer pricing. *Naval Research Logistic Q.* Vol.22, No.2, pp.375–389, 1975.

[10] T. Gal : *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics.* McGraw–Hill, 1979.

[11] D.C. Gazis : Resource allocation in a large decentralized enterprise. *European J. of Operational Research* Vol.30, No.3, pp.339–343, 1987.

[12] A.M. Geoffrion : Primal resource-directive approaches for optimizing nonlinear decomposable systems. *Operations Research* Vol.18, No.3, pp.375–403, 1970.

[13] R. Gessing : Two-level hierarchical control for stochastic optimal resource allocation. *International J. of Control* Vol.41, No.1, pp.161–175, 1985.

[14] M.D. Grigoriadis and K. Ritter : A parametric method for semidefinite quadaratic programs. *SIAM Journal of Control* Vol.7, No.4, pp.559–577, 1969.

[15] J.E. Hass : Transfer pricing in a decentralized firm. *Management Science* Vol.14, No.6, pp.B310–B331, 1968.

[16] A.C. Hax and D. Candea : *Production and Inventory Management.* Prentice-Hall, 1984.

[17] J. Hirshleifer : Economics of the divisinalized firm. *J. of Business* Vol.30, No.2, pp.96–108, 1957.

[18] J. Hirshleifer : On the economic of transfer pricing. *J. of Business* Vol.29, No.3, pp.172–184, 1956.

[19] G.H. Holstrum and E.F. Sauls : The opportunity cost transfer price. *Management Accounting* Vol.54, No.5, pp.29–33, 1973.

[20] C.C. Holt, F. Modigliani, J.F. Muth, and H.A. Simon : *Planning Production, Inventories, and Work Force.* Prentice-Hall, 1960.

[21] T. Ibaraki and N. Katoh : *Resource Allocation Problems: Algorithmic Approaches.* MIT Press, 1988.

[22] L.A. Johnson and D.C. Montgomery : *Operations Research in Production Planning, Scheduling, and Inventory Control.* John Wiley & Sons, 1974.

[23] S. Kaplan : Application of programs with maximin objective functions to problems of optimal resource allocation. *Operations Research* Vol.22, No.4, pp.802–807, 1974.

[24] R.S. Klein, H. Luss, and D.R. Smith : A lexicographic minimax algorithm for multiperiod resource allocation. *Mathematical Programming* Vol.55, No.2, pp.213–234, 1992.

[25] J. Kornai and T. Lipták : Two-level planning. *Econometorica* Vol.33, No.1, pp.141–169, 1965.

[26] L.S. Lasdon : *Optimization Theory for Large Systems.* MaCmillan, 1970. 志水清孝（訳）: 大規模システムの最適化理論，日刊工業新聞社，(1973).

[27] H. Luss and D.R. Smith : Multiperiod allocation of limited resources: a minimax approach. *Naval Research Logistics* Vol.35, No.4, pp.493–501, 1988.

[28] K. Madsen and H. Schjaer-Jacobsen : Linearly constrained minimax optimization. *Mathematical Programming* Vol.14, No.2, pp.208–223, 1978.

[29] H. Mine, M. Fukushima, and Y.J. Ryang : Parametric nonlinear programming for general cases and its application to some problems. *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.* Vol.40, No.Part3, pp.198–211, 1978.

[30] A.S. Nemirovsky and D.B. Yudin : *Problem Complexity and Method Efficiency in Optimization.* John Wiley & Sons, 1979.

[31] M. Onsi : A transfer pricing system based on opportunity cost. *The Accounting Review* Vol.45, No.3, pp.535–543, 1970.

[32] J. Robinson : An iterative method of solving a game. *Annals of Mathematics* Vol.54, No.2, pp.296–301, 1951.

[33] G.J. Silverman : Primal decomposition of mathematical programs by resource allocation: I–basic theory and a direction–finding procedures. *Operations Research* Vol.20, No.1, pp.58–74, 1972.

[34] A. ten Kate : Decomposition of linear programs by direct distribution. *Econometrica* Vol.40, No.5, pp.883–898, 1972.

[35] H. Väliaho : A unifed approach to one-parametric general quadaratic programming. *Mathematical Programming* Vol.33, No.3, pp.318–338, 1986.

[36] C. Van de Panne : *Methods for Linear and Quadratic Programming.* North–Holland, 1975.

[37] L.A. Wolsey : A resource decomposition algorithmfor general mathematical programs. *Mathematical Programming Study* Vol.14, pp.244–257, 1981.

第4章 多段階生産システムの分権的最適化

4.1 緒 言

本章では，分権的生産システムのミクロ・モデルに対して非協力ゲームの理論に基づいた生産目標設定方式による統合を提案し，ミクロ・モデルの最適化解析を行う．ミクロ・モデルは上位レベルである工場の管理部門と，工場を構成する多段階生産工程の各工程からなる下位レベルで構成される2階層の分権的生産システムである．このモデルでは，管理部門は多段階生産工程全体に関する大局的で包括的な生産計画を作成し，これを下位レベルの各工程の意思決定者に示す．各工程の意思決定者は，この生産計画の範囲内で部分システムである生産工程に関する局所的で詳細な生産計画を作成し，これに基づいて生産を実施し生産工程の管理を行う．

このミクロ・モデルに存在する相互関係は，工程間の直接的な入出力関係であるプロセス干渉のみで，システム干渉は存在しない．第2章ですでに明らかにしたように従来の分権的システムに関するアプローチ[33]では，管理部門が工程間の相互関係を調整していた．生産システムが分権的に組織化されている場合，各工程の意思決定者は他工程の生産計画を考慮することなしに工程間の相互関係を満たす自らの工程の生産計画を作成することができ，管理部門による調整を必要としない．本章では，各工程の意思決定者は上位レベルによる調整を必要としないで工程間の相互関係を満たす生産計画を作成し，上位レベルである管理部門は工程間の相互関係を考慮することなしに各工程に生産目標を設定することに

よって，システム全体の最適化を達成する問題を取り扱う．このように本章では，分権的生産システムのミクロ・モデルを対象にするのであるが，モデルとしては1つの工場とそれを構成する多段階の生産工程のみを考えればよいので工場に関する添字は省略する．

次節でこのようなミクロ・モデルに対して提案する生産目標設定方式による統合の概念を示す．次いでミクロ・モデルを生産計画問題として定式化し，工程間の相互関係を取り扱う均衡問題に対して，非協力ゲームの理論を適用し Nash 均衡解 (Nash equilibrium solution) の概念が適用できることを示す．さらに Stackelberg-Nash 均衡解 (Stackelberg-Nash equilibrium solution) の概念を用いた統合問題を示す．4.3 節と 4.4 節では，単一期間生産計画問題と多期間生産計画問題を対象に，工程間の相互関係を満たす均衡解を得るための最適化解析を行う．4.5 節では，管理部門による統合問題に対してマルチパラメトリック法を適用し，管理部門と工程間の均衡解を得るための最適化解析を行う．

4.2 多段階生産システムにおける均衡問題

4.2.1 分権的生産システムのミクロ・モデル

階層構造を持つ分権的生産システムに対するアプローチには，第2章で述べた分割原理に基づいた方法があるが，これは必ずしも組織における権限の委譲と責任の分担に基づいたものではないことはすでに明らかにした．本章で対象としている2階層の分権的生産システムでは，工場の管理部門は生産システム全体に関する大局的で包括的な生産計画を作成し，生産工程の意思決定者は局所的で詳細な生産計画を作成する．管理部門と生産工程はこのように生産計画の機能を分担しており，生産工

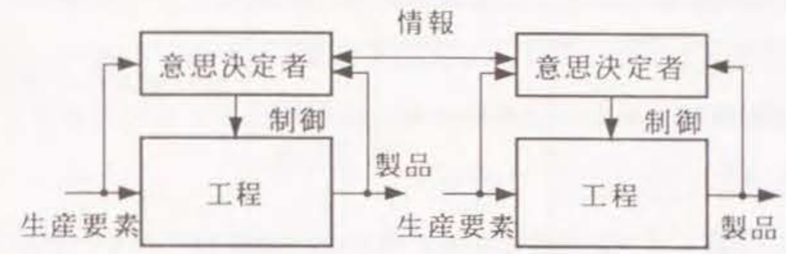


図 4.1 工程間の情報交換

程間の調整は図 4.1のように生産工程の意思決定者の情報交換によってなされ，管理部門が介入することはない．このような上位レベルと下位レベルの意思決定者が機能を分担した場合を取り扱っているものに，たとえば荻野 [1] がある．これは下位レベルのミクロ・モデルを集約した上位レベルのマクロ・モデルを考え，上位レベルは下位レベルに対して制御目標値を示し，下位レベルは目標値をできるだけ達成しようとするものである．この方法は，上位レベルの意思決定者は各部分システムに対する制御目標を設定すると同時に，部分システム間で交換される情報の仲介を行っており，部分システム間での情報交換が直接行なわれることはない．

Hax らの HPP(Hierarchical Production Planning) モデル [27, 13, 26, 25] は製造する品物の集約化の程度によって生産計画を3つのレベルに階層化しており，生産計画の機能を階層の各レベルで分担しているといえる．[10, 11] は HPP を単一段階工程と2段階工程に適用しており，[12] は下位レベルの問題を解くためのナップサック問題を提案している．このモデルでは，上位レベルで決定された生産計画は下位レベルに指示されるが，下位から上位への情報のフィードバックは考慮されていない．Graves[22]

は HPP モデルの上位レベルである第 1 レベルと次の第 2 レベルの間に Lagrange 乗数を導入したフィードバック則を提案している．このフィードバック則は分割原理にもとづいているが，分権的システムを対象としているものではない．

Axsäter らは，上位レベルが全般的生産計画 (aggregate production plan) を計画し，下位レベルが詳細な生産計画 (disaggregate production plan) を作成する HPP モデルを提案している [7, 6]．これらの研究は，階層システムとしてとらえたＭＲＰ [5] に基づいており，Hax らと同様に全般的生産計画は集約化（グループ化）された製品を対象にし，詳細な生産計画はグループ内の個々の製品を対象にしている．

これら以外の HPP モデルとしては，次のような研究が報告されている．機械台数決定問題とジョブの順序付け問題からなる 2 階層の HPP モデルに対するヒューリスティック解法を提案している [17]，全般的生産計画問題と基準生産計画問題 (master production scheduling problem) からなる 2 階層の HPP の計画期間を決定するヒューリスティック解法を提案している [16]，製鉄工場に MPS(Master Prduction Scheduling)，PRP(Production Requirements Planning)，PSS(Production Sequencing and Scheduling) からなる 3 階層の HPP モデルを適用している [31]，Hax らの HPP モデルを拡張した [40] などがある．[42, 14] はともに計画期間に基づいた HPP モデルを構築しており，[42] は 2 段階生産工程を対象に，月単位の全般的生産計画と週単位の詳細な生産計画によってＨＰＰモデルを構築し，生産計画規則と緩衝在庫の関係を解析している．[14] は長期 (1 年間) の在庫計画問題と，製品を生産ラインへ割り当てる短期 (1 月間) の割当問題，1 週間の順序付け問題からなる 3 階層の HPP モデルを提案している．

上記の HPP モデルは，全般的生産計画を上位レベルに置き，下位レベ

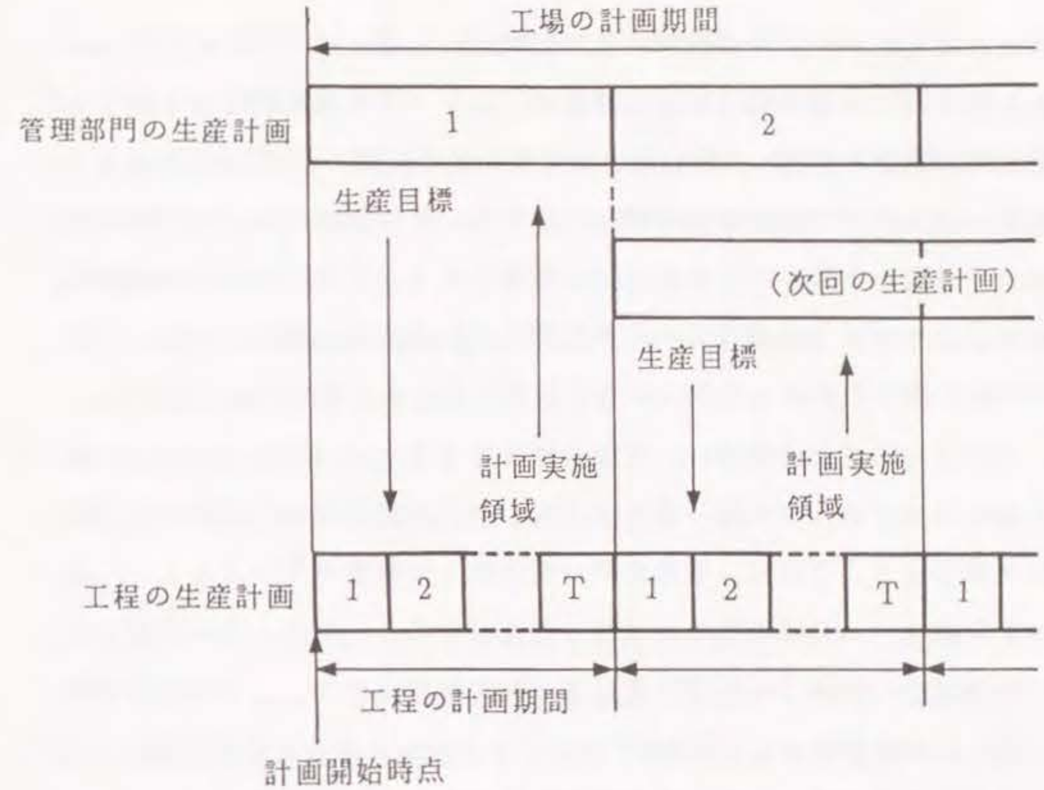


図 4.2 計画期間

ルに詳細な生産計画を置くという垂直的な機能分担である．これに対して，Haimes らは機能を水平方向に分割し，それらを統合する overlapping coordination を提案している [32, 34, 41, 24]．これはシステムが持つ機能ごとにシステムを分割し統合しようとするものである．たとえば，複数の製品を生産する複数の工場で構成される生産システムでは，生産システムを工場ごとに分割した問題と，製品ごとに分割した問題を同時に最適化するように 2 つの問題を統合する統合法である．これは後に多目的計画法と結びつけられ，多階層・多目的システムに発展されている [24]．

本章で対象としているミクロ・モデルでは，上位レベルの意思決定者である管理部門は工程間の相互関係を無視し，生産システム全体を単一工

程とみなして単一工程多期間生産計画問題の最適化を行い，そこで得られた第1期の生産時間と期首在庫量を下位レベルの意思決定者である生産工程の意思決定者に生産目標として指示する．図4.2に示すように，上位レベルの計画期間の単位期間はさらに短い単位期間からなる多期間であり，これが下位レベルの生産計画期間となる．下位レベルの意思決定者は上位レベルで最適化された多期間生産計画の第1期について，工程間の相互関係を考慮した単一工程多期間生産計画問題の最適化を行う．

生産工程の意思決定者は，生産目標をできるだけ達成するように生産計画を作成する．その際，各生産工程の意思決定者間が工程間の相互関係を調整する．これは，管理部門が取り扱う情報量を減少させるとともに，下位レベルの自律性をより高めるものである．生産工程の意思決定者は最適化した自らの生産計画に基づいて生産を実施し，その結果を第1期末に生産実績として管理部門にフィードバックする．管理部門は，この実績情報を考慮して再び多期間の生産計画を作成する．

このミクロ・モデルを最適化するための問題には，管理部門による生産目標設定方式による統合問題と，下位レベルの多段階生産システム内での工程間の相互関係を満たすように生産計画を最適化する均衡問題が存在する．均衡問題は4.3節と4.4節で最適化解析を行い，統合問題は4.5節で取り扱う．

4.2.2 前提条件と定式化

前項で述べた分権的生産システムのミクロ・モデルの生産計画問題を定式化するために，前提条件を次のように設定する．

(1) 分権的生産システムのミクロ・モデルは上位レベルである1つの管理部門と n 工程からなる下位レベルの多段階生産工程によって構成されている．各工程は図4.3のように生産設備と製品在庫からなる．各工程を添字 i で表す $(i=1,\cdots,n)$．

(2) 管理部門が計画する生産計画の計画期間を H とし，各期を添字 h で表す $(h=1,\cdots,H)$．下位レベルの生産計画期間は T 期間であるとし，各期を添字 t で表す $(t=1,\cdots,T)$)．

(3) 各工程では m_i 種類の製品を製造しているものとする．t 期における生産時間を $\boldsymbol{x}_i(t)\in \mathrm{R}^{m_i}$，$t$ 期首在庫量を $\boldsymbol{y}_i(t)\in \mathrm{R}^{m_i}$ とする．また t 期における需要量は既知で $\boldsymbol{d}_i(t)\in \mathrm{R}^{m_i}$ で表す $(i=1,\cdots,n, t=1,\cdots,T)$．計画期間の第1期の初期在庫量は既知の $\boldsymbol{y}_i(1)=\boldsymbol{a}_i\in \mathrm{R}^{m_i}$ であるとする $(i=1,\cdots,n)$．

(4) 管理部門が決定する h 期の生産時間と期首在庫量をそれぞれ $\boldsymbol{X}_i(h)\in\mathrm{R}^{m_i}$，$\boldsymbol{Y}_i(h)\in\mathrm{R}^{m_i}$ とする．また各期の需要量を $\boldsymbol{D}_i(h)\in\mathrm{R}^{m_i}$ とする．計画期間の第1期の初期在庫量は既知の $\boldsymbol{Y}_i(1)(=\boldsymbol{y}_i(1))=\boldsymbol{a}_i$ であるとする $(i=1,\cdots,n, h=1,\cdots,H)$．

(5) 工場の管理部門によって生産目標 $\boldsymbol{X}_i(1)$ と $\boldsymbol{Y}_i(2)$ が各工程に指示され，それに基づいて下位レベルの計画期間の各期ごとに目標生産時間 $\boldsymbol{X}_i(t)\in\mathrm{R}^{m_i}$ と目標在庫量 $\boldsymbol{Y}_i(t)\in\mathrm{R}^{m_i}$ が定められる $(i=1,\cdots,n, t=1,\cdots,T)$．

(6) 各工程が製品を製造するのに要する単位生産費用と単位在庫費用をそれぞれ $\mathrm{c}_{pi}\in\mathrm{R}^{m_i}$，$\mathrm{c}_{hi}\in\mathrm{R}^{m_i}$ とする．$(i=1,\cdots,n)$

(7) 各工程について利用可能な資源の量に制約があるものとする．$\boldsymbol{\alpha}_i\in\mathrm{R}^{m_i}$ を製品1個製造するのに必要な資源の量，$\boldsymbol{b}_i\in\mathrm{R}^{m_i}$ を利用可能な資源の量とする．

(8) 製品は工程計画により定められた各工程の加工を順次受け，完成品となる．加工が終了した製品は仕掛在庫に送られ，後続工程から要求があれば直ちに出庫される．また生産リードタイムと製品の生産順序は考慮

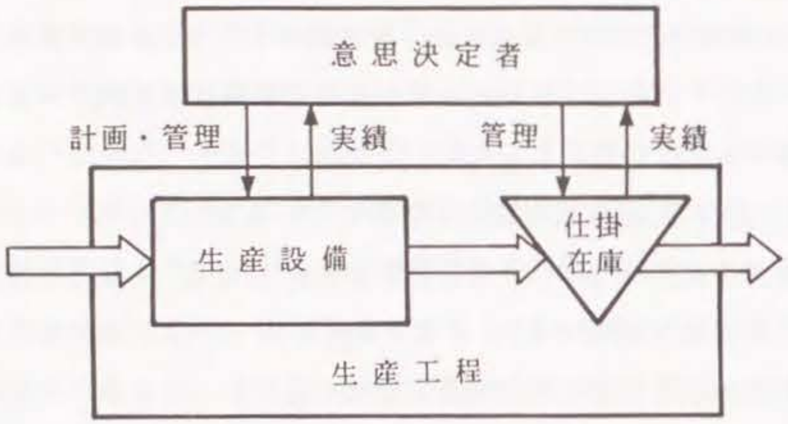


図 4.3 生産工程

しない．品切れは許されないものとする．

上記の前提条件に基づいて，工場の H期間生産計画問題と工程の T期間生産計画問題を以下のように定式化する．

管理部門は H期間に関する $\Sigma_{i=1}^{n} m_i$種類の製品の総生産費用を最小にする生産計画を作成する．その生産計画問題は，次のような線形計画問題として定式化することができる．

$$\text{Min. } z(\boldsymbol{Y}_i(h+1), \boldsymbol{X}_i(h)) = \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{c}_{pi}^{\top}\boldsymbol{X}_i(h) + \boldsymbol{c}_{hi}^{\top}\boldsymbol{Y}_i(h+1)) \tag{4.1}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{Y}_i(h+1) = \boldsymbol{Y}_i(h) + \boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(h) - \boldsymbol{D}_i(h),$$

$$i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \tag{4.2}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\top}\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(h) \leq \boldsymbol{b}_i, i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \tag{4.3}$$

$$\boldsymbol{Y}_i(1) = \boldsymbol{a}_1, i = 1, \cdots, n \tag{4.4}$$

$$\boldsymbol{X}_i(h) \geq 0, \boldsymbol{Y}_i(h+1) \geq 0, i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \tag{4.5}$$

ここで$\boldsymbol{p}_i \in \mathrm{R}^{m_i \times m_i}$は，生産率で工程 i が製造する製品の単位時間当りの

生産個数（個／時間）である．

他方，多段階生産システムの T期間生産計画問題は以下のようである．各工程の意思決定者は，与えられた生産目標をできるだけ達成するように生産時間と在庫量を決定し，生産計画の最適化を行う．これを行うために各工程における目的関数 $f_i(\boldsymbol{y}_i(t+1), \boldsymbol{x}_i(t))$ を生産目標からのずれの二乗和として表すことにする．すなわち

$$\begin{aligned} & f_i(\boldsymbol{y}_i(t+1), \boldsymbol{x}_i(t)) \\ & \quad = (\boldsymbol{y}_i(t+1) - \boldsymbol{Y}_i(t+1))^{\top} Q_i'(\boldsymbol{y}_i(t+1) - \boldsymbol{Y}_i(t+1)) \\ & \qquad + (\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{X}_i(t))^{\top} R_i(\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{X}_i(t)) \end{aligned} \tag{4.6}$$

ここで Q_i'と R_iは，生産目標からのずれに対するペナルティ係数で $m_i \times m_i$対角行列である．一方，期首在庫量$\boldsymbol{y}_i(t+1)$ は，他工程に送られる量（内部需要量）を考慮して次式によって与えられる．

$$\boldsymbol{y}_i(t+1) = \boldsymbol{y}_i(t) + B_{ii}\boldsymbol{x}_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ij}\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{d}_i(t) \tag{4.7}$$

ここで $B_{ij} = \boldsymbol{p}_j B_{ij}'$，$B_{ij}'$は工程 i の後続工程 jで生産する製品 1 個に要する工程 i の製品の数で $m_j \times m_i$行列である．

以上のことより工程 $i(=1, \cdots, n)$ における生産計画問題は，式 (4.7) と $\boldsymbol{y}_i(t)$ と $\boldsymbol{x}_i(t)$ の非負条件を制約条件として，式 (4.6) を最小化する問題として定式化できる．すなわち，すべての $i(=1, \cdots, n)$ に対して

$$\begin{aligned} \text{Min. } & \sum_{t=1}^{T} f_i(\boldsymbol{y}_i(t+1), \boldsymbol{x}_i(t)) \\ & = \sum_{t=1}^{T}\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}_i(t+1) - \boldsymbol{Y}_i(t+1))^{\top} Q_i(\boldsymbol{y}_i(t+1) - \boldsymbol{Y}_i(t+1)) \\ & \qquad + (\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{X}_i(t))^{\top} R_i(\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{X}_i(t))\} \end{aligned} \tag{4.8}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y}_i(t+1) = \boldsymbol{y}_i(t) + B_{ii}\boldsymbol{x}_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ij}\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{d}_i(t),$$

$$t = 1, \cdots, T \tag{4.9}$$

$$\boldsymbol{y}_i(1) = \boldsymbol{a}_i, i = 1, \cdots, n \tag{4.10}$$

$$\boldsymbol{y}_i(t+1) \geq 0, \boldsymbol{x}_i(t) \geq 0, t = 1, \cdots, T \tag{4.11}$$

4.2.3 工程間の均衡問題

前項で設定した工程 i の生産計画問題をみると，式 (4.9) に他工程の決定変数 $\boldsymbol{x}_j (j \neq i, j = 1, \cdots, n)$ が存在する．これは工程 i の意思決定者にとって生産計画立案時には未知の変数であり，この $\boldsymbol{x}_j$ を知ることなしに式 (4.8)〜(4.11) で定式化される生産計画問題を最適化することは困難である．前章ではこのような問題に対して $\boldsymbol{x}_j$ をパラメータとして取り扱い，上位レベルである本部が統合することによって最適化を行った．本章では，前節で述べたように上位レベルによる調整を必要としない方法として，非協力ゲームにおける Nash 均衡解を求める方法 [8] を取りあげる．この Nash 均衡解の定義は次の通りである．

定義 4.1 n 人非協力ゲームにおいて Nash 均衡解が存在するならば，n 人の意思決定者がこの Nash 均衡解を採用する限り，いずれの意思決定者も自己の目的関数を改良するような解は存在しない． ∎

この定義を本章の場合に適用するために，式 (4.9) を式 (4.8) に代入して，目的関数を決定変数 $\boldsymbol{x}$ の関数 J_i として表す．すなわち，

$$\begin{aligned} & J_i(\boldsymbol{x}_1(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n(t)) \\ & \equiv \sum_{t=1}^{T} f_i(\boldsymbol{y}_i(t) + B_{ii}\boldsymbol{x}_i(t) - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ij}\boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{d}_i(t), \boldsymbol{x}_i(t)) \end{aligned} \tag{4.12}$$

これを用いて先の定義を表すと，次のようになる．

定義 4.2 すべての $i (= 1, \cdots, n)$ について次式を満たす $\boldsymbol{x}_i^*(t)$ が Nash 均衡解である．

$$\begin{aligned} & J_i(\boldsymbol{x}_1^*(t), \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*(t), \boldsymbol{x}_i(t), \boldsymbol{x}_{i+1}^*(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n^*(t)) \\ & \geq J_i(\boldsymbol{x}_1^*(t), \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*(t), \boldsymbol{x}_i^*(t), \boldsymbol{x}_{i+1}^*(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n^*(t)) \end{aligned} \tag{4.13}$$

∎

先に述べたように未知の決定変数 $\boldsymbol{x}_j$ が存在するために生産計画問題の最適化を困難にしている．この決定変数を用いることなしに Nash 均衡解を得るために，各工程の在庫量を用いる方法を考える．そこでまず工程間の相互関係を表す行列 B_i を

$$B_i = (-B_{1i}, \cdots, -B_{i-1i}, B_{ii}, -B_{i+1i}, \cdots, -B_{ni})^{\mathsf{T}}$$

と置く．これは $\Sigma_{j=1}^{n} m_j \times m_i$ 行列である．これに従ってベクトルと行列を次のように定義する．

$$\boldsymbol{y}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{y}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{y}_n(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{Y}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{Y}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{Y}_n(t) \end{pmatrix}, \boldsymbol{d}(t) = \begin{pmatrix} \boldsymbol{d}_1(t) \\ \vdots \\ \boldsymbol{d}_n(t) \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{a} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a}_1 \\ \vdots \\ \boldsymbol{a}_n \end{pmatrix}, Q = \begin{bmatrix} Q_1' & & & & \\ & \ddots & & 0 & \\ & & Q_i' & & \\ & 0 & & \ddots & \\ & & & & Q_n' \end{bmatrix}$$

これらの記号を用いて式 (4.8)〜(4.11) を書き直すと，次のようになる．

$$\text{Min.} \sum_{t=1}^{T} f_i(\boldsymbol{y}(t+1), \boldsymbol{x}_i(t))$$

$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}(t+1) - \boldsymbol{Y}(t+1))^{\mathsf{T}} Q(\boldsymbol{y}(t+1) - \boldsymbol{Y}(t+1))$$

$$+(\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{X}_i(t))^{\mathsf{T}} R_i(\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{X}_i(t))\} \tag{4.14}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{y}(t+1) = \boldsymbol{y}(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i \boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{d}(t),$$

$$t = 1, \cdots, T \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{a}, \tag{4.16}$$

$$\boldsymbol{y}(t+1) \geq 0, \boldsymbol{x}_i(t) \geq 0, t = 1, \cdots, T \tag{4.17}$$

この生産計画問題を最適化することによって，工程間の相互関係を満たす均衡解$\boldsymbol{x}_i^*(t), i = 1, \cdots, n$を得ることができる．

4.2.4 階層間の均衡問題

本章で取り上げる管理部門による統合問題は，下位レベルの各工程に生産目標を設定するものであった．そこでは，管理部門は生産計画を工程の生産計画に先行して計画し，工程は工程間の相互関係を考慮してこの生産目標を達成するように生産計画をたてる．このような統合問題は，非協力ゲームの理論における意思決定に優先権が存在する場合の均衡問題として知られている [43]．前項の場合と同様に管理部門の目的関数 (4.1) に式 (4.2) を代入して，目的関数を決定変数$\boldsymbol{X}$の関数 J_0として表す．すなわち，

$$J_0(\boldsymbol{X}_1(h), \cdots, \boldsymbol{X}_n(h)) \equiv z(\boldsymbol{Y}_i(h) + \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{X}_i(h) - \boldsymbol{D}_i(h), \boldsymbol{X}_i(h)) \tag{4.18}$$

管理部門は工程の生産計画の影響を受けるので上式を $J_0(\boldsymbol{X}_i(h), \boldsymbol{x}_i(t))$ のように表すことにする．同様に式 (4.12) で表した工程の目的関数を $J_i(\boldsymbol{X}_i(h), \boldsymbol{x}_i(t))$ と表す．本章の場合は管理部門に意思決定の優先権があり，管理部門の決定$\boldsymbol{X}_i^*(h) \in M$が与えられたとき，工程 i は

$$J_i(\boldsymbol{X}_i^*(h), \boldsymbol{x}_i^*(t)) \leq J_i(\boldsymbol{X}_i^*(h), \boldsymbol{x}_i(t)), \boldsymbol{x}_i \in \mathrm{S}_i \tag{4.19}$$

となるように Nash 均衡解$\boldsymbol{x}_i^*(t) \in \Phi(\boldsymbol{X}_i^*(h))$を選ぶ．ここで M，S_iはそれぞれ管理部門と工程の実行可能領域であり，Φは任意の関数である．このとき

$$J_0(\boldsymbol{X}_i^*(h), \Phi(\boldsymbol{X}_i^*(h))) \leq J_0(\boldsymbol{X}_i^*(h), \Phi(\boldsymbol{X}_i(h)), \in M \tag{4.20}$$

となるような$\boldsymbol{X}_i^*(h) \in M$，$\boldsymbol{x}_i^*(t) \in \mathrm{S}_i$が存在すれば$\boldsymbol{x}_i^*(t) \in \mathrm{S}_i$は Stackelberg-Nash 均衡解である．下位レベルが単一工程より成るときこの解は Stackelberg 均衡解となる．

式 (4.1)~(4.5) で与えた管理部門の生産計画問題は線形計画問題であり，式 (4.8)~(4.11) の工程の生産計画問題は 2 次計画問題であった．任意の関数Φが$\boldsymbol{X}_i(h)$ に関して陽的に得られるのであれば，管理部門の生産計画問題の最適化は容易であるが，このような 2 階層の最適化問題を対象にした研究はまだ報告されていない．4.5 節では，$\boldsymbol{X}_i(h)$ と$\boldsymbol{Y}_i(h+1)$ をパラメータとした工程の生産計画問題にマルチパラメトリック 2 次計画法を適用し，Φを陽的に求める方法を提案する．これによって得たΦを管理部門の生産計画問題の制約条件に追加することによってミクロ・モデル全体を最適にすることができることを明らかにする．

非協力ゲームの理論を生産計画問題や，在庫管理問題，保守の問題，マーケティングの問題などに適用したものに [19, 18, 29, 28, 36] などが報告されている．[19] は生産部門と保守部門の間に協力関係が存在することに着目し，非協力ゲームの理論の 1 つの手法である微分ゲーム (differential game) を適用することによって Nash 均衡解を求めている．[29] は [19] で取りあげられたモデルを 2 人非ゼロ和微分ゲームとして定式化し，パレート最適解を求めている．[18] は微分ゲームをマネジメント・サイエンスの

各分野に適用した論文を概括したものである．また [28] は 2 つの工場の競合関係を微分ゲームのモデルとして定式化し，開ループ Nash 均衡解を求めている．[36] は確率需要を持つ製品の在庫管理問題を対象にし，その Nash 均衡解の存在と唯一性の条件を導いている．しかしながら，本章のように分権的システムや生産計画問題に対して非協力ゲームの理論を適用した報告はみられない．

4.3 単一期間生産計画問題

4.3.1 生産計画問題の最適化

分権的生産システムのミクロ・モデルの最適化解析を行うにあたって，本節では下位レベルである多段階生産工程の均衡問題で最も基本的な単一期間生産計画問題を取りあげ，その最適化解析を行い，数値計算例に適用してその妥当性を検討する．

前節で定式化した工程 i の多期間生産計画問題を $T=1$ の場合の単一期間生産計画問題に書き換える．すなわち

$$\begin{aligned} \text{Min.}\ \ f_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_i) &= \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Y})^\top Q(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Y}) \\ &\quad +(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}_i)^\top R_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}_i)\} \qquad (4.21) \\ \text{sub. to}\ \ \boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}^0+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{D} \qquad (4.22) \\ \boldsymbol{y} &\geq 0,\ \boldsymbol{x}_i\geq 0 \qquad (4.23) \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{D}=\boldsymbol{d}(1)=\boldsymbol{D}(1)$，$\boldsymbol{y}^0=(\boldsymbol{y}_1(1)^\top,\cdots,\boldsymbol{y}_n(1)^\top)^\top$ である．

式 (4.13) で与えた Nash 均衡解の定義は多期間の場合であるが，単一期間の場合でも同様に定義することができる．これを満たす Nash 均衡解を求めるために，この単一期間生産問題 (4.21)～(4.23) に対する Lagrange

関数を次のように設定する．

$$\begin{aligned} &L_i(\boldsymbol{y},\boldsymbol{x}_1,\cdots,\boldsymbol{x}_n,\boldsymbol{\lambda}) \\ &\quad\equiv\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Y})^\top Q(\boldsymbol{y}-\boldsymbol{Y})+(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}_i)^\top R_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}_i)\} \\ &\quad\quad+\boldsymbol{\lambda}^\top(\boldsymbol{y}^0+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{D}-\boldsymbol{y}) \\ &\quad=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}^0+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{D}-\boldsymbol{Y})^\top Q(\boldsymbol{y}^0+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{D}-\boldsymbol{Y}) \\ &\quad\quad+(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}_i)^\top R_i(\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{X}_i)\} \\ &\quad\quad+\boldsymbol{\lambda}^\top(\boldsymbol{y}^0+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j-\boldsymbol{D}-\boldsymbol{Y}) \end{aligned}$$

ここで $\boldsymbol{\lambda}$ は Lagrange 乗数で，$\sum_{i=1}^{n}m_i$ ベクトルである．

これより Nash 均衡解が存在するための必要条件は，すべての $i(=1,\cdots,n)$ について次式が同時に成り立つことである．

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{y}}=Q(\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{Y})-\boldsymbol{\lambda}^*=0 \qquad (4.24)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{x}_i}=B_i^\top Q(\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{Y})+R_i(\boldsymbol{x}_i^*-\boldsymbol{X}_i)+B_i^\top\boldsymbol{\lambda}^*=0 \qquad (4.25)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{\lambda}}=\boldsymbol{y}^0+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j^*-\boldsymbol{D}-\boldsymbol{y}^*=0 \qquad (4.26)$$

$$\boldsymbol{y}^*\geq 0,\ \boldsymbol{x}_i^*\geq 0 \qquad (4.27)$$

式 (4.24) より

$$\boldsymbol{\lambda}^*=Q(\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{Y})$$

これと (4.25) より

$$\boldsymbol{x}_i^*=-2R_i^{-1}B_i^\top Q(\boldsymbol{y}^*-\boldsymbol{Y})+\boldsymbol{X}_i$$

を得る．これを式 (4.26) に代入して $\boldsymbol{y}^*$ に関して整理すると，Nash 均衡解における在庫量は次のようになる．

$$\boldsymbol{y}^* = \Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V + \boldsymbol{Y} \tag{4.28}$$

ここで

$$\Gamma \equiv I + 2\sum_{j=1}^{n} B_j R_j^{-1} B_j^{\mathsf{T}} Q \tag{4.29}$$

$$V \equiv \Gamma^{-1}(\sum_{j=1}^{n} B_j \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{D}) \tag{4.30}$$

Iは$\Sigma_{j=1}^n m_j \times \Sigma_{j=1}^n m_j$単位行列である．また$\Gamma$は定義式 (4.29) より$\Sigma_{j=1}^n m_j \times \Sigma_{j=1}^n m_j$の正則行列であることは明かである．これを用いて$\boldsymbol{x}_i^*$と$\boldsymbol{\lambda}^*$を求めると，

$$\begin{aligned} \boldsymbol{x}_i^* &= -2R_i^{-1} B_i^{\mathsf{T}} Q\{\Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V\} + \boldsymbol{X}_i & (4.31) \\ \boldsymbol{\lambda}^* &= Q\{\Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V\} & (4.32) \end{aligned}$$

を得る．

以上の展開より，すべての工程 $i(=1,\cdots,n)$ について式 (4.24)~(4.27) を同時に満たす Nash 均衡解は式 (4.31) で与えられ，そのときの期首在庫は式 (4.28) で与えられる．これらの式から明かなように，各工程の意思決定者は計画立案時に既知である他工程の$\boldsymbol{y}_i^0$，B_i，Q，R_i，$\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{Y}_i$，$\boldsymbol{D}_i$を知ることによって，他工程の生産時間$\boldsymbol{x}_j^*$を知ることなしに自らの工程の生産計画をたてることができる．このようにしてたてられる生産計画は，他工程との相互関係を満たしている．

4.3.2 分割原理との比較

本項では，従来からの分権的最適化の手法である分割原理に基づく方法を取りあげ，前項で提案した非協力ゲームによる分権的最適化と比較・検討する．そのために 4.2 節で定式化した工程の生産計画問題 (4.8)~(4.11)

で，目的関数が工程 i に関して加算が可能であると仮定する．このとき，システム全体の単一期間生産計画問題は以下のようになる．

$$\begin{aligned} \text{Min.} \ & \sum_{i=1}^{n} f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i)^{\mathsf{T}} Q_i'(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i) \\ &\quad + (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)^{\mathsf{T}} R_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)\} & (4.33) \\ \text{sub. to } & \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ij}\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{d}_i \\ & \qquad i = 1,\cdots,n & (4.34) \\ & \boldsymbol{y}_i \geq 0, \boldsymbol{x}_i \geq 0, i = 1,\cdots,n & (4.35) \end{aligned}$$

ここで$\boldsymbol{y}_i^0 = \boldsymbol{y}_i(1)$，$i = 1,\cdots,n$である．

上記の単一期間生産計画問題に対する Lagrange 関数を次のように設定する．

$$\begin{aligned} & L(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \\ &\equiv \sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i)^{\mathsf{T}} Q_i'(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i) + (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)^{\mathsf{T}} R_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)\}] \\ &\quad + \sum_{i=1}^{n}\{\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1}^{n} B_{ji}\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{y}_i)\} \end{aligned}$$

第 2 章で概括したように分割原理には様々な手法が提案されているが，ここでは価格による統合法である goal coordination method を取りあげる．この方法を生産計画問題 (4.33)~(4.35) に適用するために，上記の Lagrange 関数を次のように書き換える．

$$\begin{aligned} L(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) &= \sum_{i=1}^{n} L_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n}[\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i)^{\mathsf{T}} Q_i'(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i) + (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)^{\mathsf{T}} R_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)\} \end{aligned}$$

$$+\boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{y}_i) - \boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{\lambda}_j]$$

これより各工程に関する部分問題は次のようになる．

$$\text{Min.}\ f_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i) = \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i)^{\mathsf{T}} Q_i'(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i)$$
$$+(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)^{\mathsf{T}} R_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)\} - \boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{\lambda}_j \tag{4.36}$$
$$\text{sub. to}\ \boldsymbol{y}_i = \boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i \tag{4.37}$$

この部分問題の最適化を行うために，部分問題の Lagrange 関数を次のように設定する．

$$L_i(\boldsymbol{y}_i, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{\lambda}_i) = \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i)^{\mathsf{T}} Q_i'(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i) + (\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)^{\mathsf{T}} R_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)\}$$
$$-\boldsymbol{x}_i^{\mathsf{T}} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{\lambda}_j + \boldsymbol{\lambda}_i^{\mathsf{T}}(\boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{y}_i)$$

これより最適解が存在するための必要条件は，以下のようである．

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{y}_i} = Q_i'(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i) - \boldsymbol{\lambda}_i = 0 \tag{4.38}$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} = B_{ii}^{\mathsf{T}} Q_i'(\boldsymbol{y}_i - \boldsymbol{Y}_i) + R_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)$$
$$- \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{\lambda}_j + B_{ii}\boldsymbol{\lambda}_i = 0 \tag{4.39}$$
$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} = \boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{y}_i = 0 \tag{4.40}$$

前項と同様に行うことによって，上記の必要条件を満たす最適解を得ることができる．すなわち，

$$\boldsymbol{x}_i^* = -2R_i^{-1} B_{ii}^{\mathsf{T}} Q_i'(\Gamma_i^{-1}(\boldsymbol{y}_i^0 - \boldsymbol{Y}_i) + V_i) + \boldsymbol{X}_i$$
$$+(I_i - 2R_i^{-1} B_{ii}^{\mathsf{T}} Q_i' \Gamma_i^{-1} B_{11}) R_i^{-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{\lambda}_j \tag{4.41}$$
$$\boldsymbol{y}_i^* = \Gamma_i^{-1}(\boldsymbol{y}_i^0 - \boldsymbol{Y}_i) + V_i + \Gamma_i^{-1} B_{ii} R_i^{-1} \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{\lambda}_j \tag{4.42}$$

ここで

$$\Gamma_i \equiv I_i + 2B_{ii}R_i^{-1}B_{ii}^{\mathsf{T}}Q_i'$$
$$V_i \equiv \Gamma_i^{-1}(B_{ii}\boldsymbol{X}_i - \boldsymbol{d}_i)$$

コーディネータである工場の管理部門は，工程間の相互関係を満たすように$\boldsymbol{\lambda}_i$，$i = 1, \cdots, n$を決定する．すなわち，

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} = \boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{y}_i = 0$$

を満たすように$\boldsymbol{\lambda}_i$を決定する．工程間の相互関係を満たし生産システム全体の最適解を得るために，はじめに任意の$\boldsymbol{\lambda}_i^1$に対して各工程の部分問題を解き，そのときの部分最適解$\boldsymbol{x}_i^1$，$\boldsymbol{y}_i^1$を管理部門に報告する．管理部門はこれらの値を用いて$\ell = 1$とした次式により新しい$\boldsymbol{\lambda}_i^2$を計算し，これを各工程に提示する．

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{\ell+1} = \boldsymbol{\lambda}_i^{\ell} + \varepsilon\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i}$$
$$= \boldsymbol{\lambda}_i^{\ell} + \varepsilon(\boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i^{\ell} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{x}_j^{\ell} - \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{y}_i^{\ell}) \tag{4.43}$$

ここでεはステップ巾である．各工程はこの$\boldsymbol{\lambda}_i^{\ell+1}$を用いて再び部分問題を解く．これを解が収束するまで繰り返す．繰り返しの停止条件は，ある正の微小量δ，$0 < \delta < 1$に対して

$$| \boldsymbol{y}_i^0 + B_{ii}\boldsymbol{x}_i^{\ell} - \sum_{j=1, j\neq i}^{n} B_{ji}\boldsymbol{x}_j^{\ell} - \boldsymbol{d}_i - \boldsymbol{y}_i^{\ell} | < \delta \tag{4.44}$$

が成り立つことである．これが成り立つとき，解は収束し最適解が得られと判断する．

式 (4.41)，(4.42) で与えられる解を前項の均衡解 (4.31)，(4.42) と比べると，非協力ゲームによる場合では，各工程は他の工程の$\boldsymbol{y}_j^0$，B_j，Q，

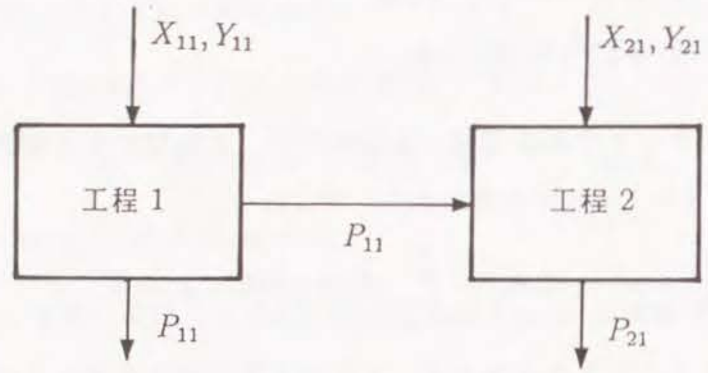


図 4.4 2 工程生産システム

R_j，$\boldsymbol{X}_j$，$\boldsymbol{Y}_j$，$\boldsymbol{D}_j$を知る必要があるが，分割原理による場合では，自らの工程の$\boldsymbol{y}_i^0$，B_{ii}，Q_i'，R_i，$\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{Y}_i$，$\boldsymbol{d}_i$と他工程の B_{ji}を知るだけでよい．これより分割原理は，情報処理に関する分権化，すなわち情報分権化であるといわれている．しかしながら意思決定に関する権限が委譲されそれに責任が伴うのであれば，責任ある決定を下すためにはより多くの情報を収集し，それに基づいて判断しなければならない．Brdyś は [15] で分割原理に基づく分権化であってもコーディネータを設置しないでサブシステム間の情報交換のみで総合を行う場合，いまの場合と同様にサブシステムが取り扱う情報量が増えることを指摘している．さらに，非協力ゲームに基づく分権化では，管理部門は各工程の生産目標を設定するのであるが，分割原理の場合ではこれに工程間の相互関係の調整が加わり，負担は非協力ゲームの場合に比べて増大する．

4.3.3 数値計算例

2 工程生産システム　数値計算例のモデルとして図 4.4に示す 2 工程生産システムを考える．上位レベルの意思決定者は多期間の生産計画をたて，その第 1 期に生産する製品の生産時間と期首在庫量を生産目標として各工程の意思決定者に指示しているものとする．第 1 期における各製品の需要量は確定しているものとする．各工程の意思決定者は，工程間の相互関係を考慮して確定需要量を満たしかつ生産目標をできるだけ達成するように第 1 期の生産計画をたてる．

図 4.4に示しているように，工程 2 で生産される製品 P_{21}は工程 1 で生産される製品 P_{11}を 1 個用いるものとする．このとき，B'_{ij}と $B_i(i,j=1,2)$ は次のようになる．

$$B'_{11}=[1], B'_{12}=[1], B'_{21}=[0], B'_{22}=[1],\ B_1=\begin{bmatrix} p_{11} \\ 0 \end{bmatrix}, B_2=\begin{bmatrix} -p_{21} \\ p_{21} \end{bmatrix}$$

また Q，$R_i(i=1,2)$ は次のようであるとする．

$$Q=\begin{bmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{21} \end{bmatrix}, R_1=[r_{11}], R_2=[r_{21}]$$

式 (4.29) より Γは次のようになる．

$$\Gamma=\begin{pmatrix} 1+2p_{11}^2q_{11}/r_{11}+2p_{21}^2q_{11}/r_{21} & -2p_{21}^2q_{21}/r_{21} \\ -2p_{21}^2q_{11}/r_{21} & 1+2p_{21}^2q_{21}/r_{21} \end{pmatrix}$$

これの逆行列は

$$\Gamma^{-1}=\begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{bmatrix}$$

である．ここで

$$\gamma_{11}=\frac{1+2p_{21}q_{21}^2/r_{21}}{|\Gamma|}, \gamma_{12}=\frac{-2p_{21}q_{11}^2/r_{21}}{|\Gamma|},$$

$$
\gamma_{21} = \frac{-2p_{21}q_{21}^2/r_{21}}{|\Gamma|}, \gamma_{22} = \frac{1 + 2p_{11}q_{11}^2/r_{11} + 2p_{21}q_{11}^2/r_{21}}{|\Gamma|}
$$

$$
\begin{aligned}
|\Gamma| = & -\left(\frac{2p_{21}^2 q_{11}}{r_{21}}\right)\left(\frac{2p_{21}^2 q_{21}}{r_{21}}\right) \\
& + \left(1 + \frac{2p_{11}^2 q_{11}}{r_{11}} + \frac{2p_{21}^2 q_{11}}{r_{21}}\right)\left(1 + \frac{2p_{21}^2 q_{21}}{r_{21}}\right)
\end{aligned}
$$

これを用いて式 (4.28) と式 (4.31) より Nash 均衡解として

$$
\begin{aligned}
x_{11}^* &= -\frac{2p_{11}q_{11}}{r_{11}}\{\gamma_{11}(y_{11}^0 + p_{11}X_{11} - p_{21}X_{21} - d_{11} - Y_{11}) \\
&\quad + \gamma_{12}(y_{21}^0 + p_{21}X_{21} - d_{21} - Y_{21})\} + X_{11} \\
x_{21}^* &= \frac{2p_{21}q_{11}}{r_{21}}\{\gamma_{11}(y_{11}^0 + p_{11}X_{11} - p_{21}X_{21} - d_{11} - Y_{11}) \\
&\quad + \gamma_{12}(y_{21}^0 + p_{21}X_{21} - d_{21} - Y_{21})\} \\
&\quad - \frac{2p_{21}q_{21}}{r_{21}}\{\gamma_{21}(y_{11}^0 + p_{11}X_{11} - p_{21}X_{21} - d_{11} - Y_{11}) \\
&\quad + \gamma_{22}(y_{21}^0 + p_{21}X_{21} - d_{21} - Y_{21})\} + X_{21}
\end{aligned}
$$

を得る．このときの期首在庫は式 (4.28) より

$$
\begin{aligned}
y_{11}^* &= \gamma_{11}(y_{11}^0 + p_{11}X_{11} - p_{21}X_{21} - d_{11} - Y_{11}) \\
&\quad + \gamma_{12}(y_{21}^0 + p_{21}X_{21} - d_{21} - Y_{21}) + Y_{11} \\
y_{21}^* &= \gamma_{21}(y_{11}^0 + p_{11}X_{11} - p_{21}X_{21} - d_{11} - Y_{11}) \\
&\quad + \gamma_{22}(y_{21}^0 + p_{21}X_{21} - d_{21} - Y_{21}) + Y_{21}
\end{aligned}
$$

となる．

この結果を見ると，工程 1 と工程 2 は生産計画立案時に既知である情報を互いに交換しておくことによって，他工程の生産計画を知ることなしに工程間の相互関係を満たす自からの工程の生産計画をたてることができることがわかる．一般的には生産目標に対するずれは，生産時間と在庫量に関するそれぞれのペナルティの比 $(q_{i1}/r_{i1}, i = 1, 2)$ に関するト

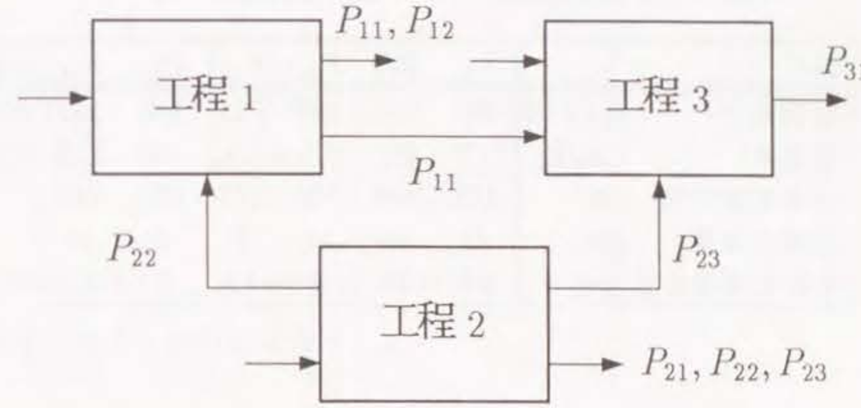


図 4.5 3 工程生産システム

レードオフの関係があることが知られている [30]．本研究で対象としているような工程間に相互関係が存在する場合では，$q_{i1}/r_{i1}, i = 1, 2$ だけではなく工程 1 の在庫量と工程 2 の生産時間の間にもトレードオフが存在する．これは q_{11}/r_{21}によって表わされている．

3 工程生産システム　　図 4.5に示すような 3 工程からなる多段階生産システムを考える．数値計算に必要なデータを表 4.1に示す．また生産目標からのずれに対するペナルティは，すべての製品について $q_{..} = 0.5, r_{..} = 1.0$ とする．

この例では，各工程は図 4.6に示す製品構成を持つ製品を製造しており，製品 P_{11}と製品 P_{23}は製品 P_{31}を製造するために用いられ，製品 P_{12}を製造するために製品 P_{22}が用いられる．それぞれの必要数量は 1 個であるとする．これより $B_i (i = 1, 2, 3)$ は次のようになる．

表 4.1 3 工程生産システムの数値計算データ

製品		P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{31}
需要量	(pc)	305	326	239	103	100	197
生産率	(pc/h)	3.0	2.2	1.5	2.4	1.6	1.25
目標生産時間	(h)	168	158	160	175	185	156
目標在庫量	(pc)	12	15	11	8	5	10
初期在庫量	(pc)	10	25	10	10	5	12

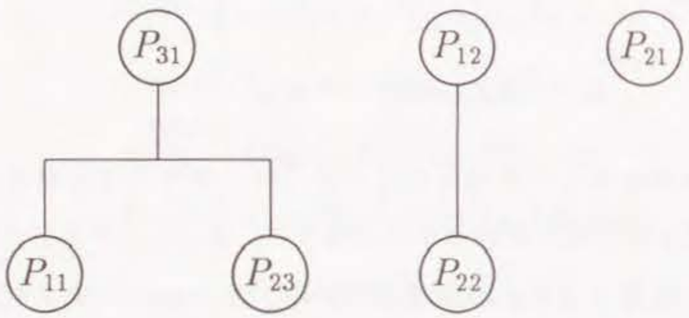


図 4.6 製品構成

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{11} \\ \cdots \\ B_{21} \\ \cdots \\ B_{31} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.0 \\ \cdots & \cdots \\ 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & -2.4 \\ 0.0 & 0.0 \\ \cdots & \cdots \\ 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} B_{12} \\ \cdots \\ B_{22} \\ \cdots \\ B_{32} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 1.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2.4 & 0.0 \\ 0.0 & 0.0 & 1.6 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0.0 & 0.0 & 0.0 \end{bmatrix}$$

$$B_3 = [B_{13}, B_{23}, B_{33}]^{\mathsf{T}} = [-1.25\ 0.0\ 0.0\ 0.0\ -1.25\ 1.25]^{\mathsf{T}}$$

表 4.2 3 工程生産システムの最適生産計画（ Nash 均衡解）

製品		P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{31}
生産時間	(h)	168.19	157.76	160.00	175.88	185.28	156.00
在庫量	(pc)	12	15	11	8	5	10

式 (4.28)~(4.31) を用いて，表 4.2に示すような生産目標からのずれを最小にする最適生産計画を得る．

4.4 多期間生産計画問題

4.4.1 多段階生産システムの多期間生産計画問題

本節では，前節の単一期間生産計画問題を多期間生産計画問題に拡張する．管理部門によって計画期間の各期における各工程に対する目標生産時間と目標在庫量が与えられているものとする．各工程の意思決定者は工程間の相互関係を考慮してこれらの生産目標を達成するように生産計画の最適化を行う．

本節で対象としているような多段階生産工程で多製品を多期間にわたって生産する生産システムに対する最適化問題を取り扱っている研究は数多く報告されている．すなわち，生産計画期間に関する研究には [9]，[35] などが報告されており，多段階生産システムに関する研究は [37]，[6] などで紹介されている．しかしながら多段階生産システムの多期間生産計画問題を直接対象としているものは少なく，その多くは多段階生産システムの単一期間生産計画問題か，あるいは単一段階生産システムの多期間生産計画問題である．たとえ多段階生産システムの多期間生産計画を対象としていても工程間の相互関係は考慮されていないので，本質的に

は単一段階生産システムが複数存在する生産システムである場合を対象としていることになる．本節のように多段階生産システムを階層システムとしてとらえた研究に [21] や [23]，[3] などがある．[21] は多段階生産システムの生産計画問題を単一段階生産システムに分割し，最終工程から順に第 1 工程まで解いていく方法を提案している．[23] は分割原理を用いた方法を提案している．[3] は Dantzig-Wolfe の分解原理に基づく線形近似解法を提案している．これらの研究はいずれも，大規模な生産計画問題を単一期間や単一段階生産システムに分割して，問題の規模を小さくしたり，第 1 章で述べたように分割原理が持つメカニズムを利用して，分権的管理に論究したものであって，本研究のように組織的に分権化された分権的生産システムを対象にしたものではない．

4.4.2 最適化解析

本節で対象としている多段階生産システムの多期間生産計画問題は 4.2 節ですでに定式化しており，それは次のようであった．

$$\text{Min.}\ \sum_{t=1}^{T} f_i(\boldsymbol{y}(t+1), \boldsymbol{x}_i(t))$$
$$= \sum_{t=1}^{T} \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}(t+1) - \boldsymbol{Y}(t+1))^{\mathsf{T}} Q(\boldsymbol{y}(t+1) - \boldsymbol{Y}(t+1))$$
$$+(\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{X}_i(t))^{\mathsf{T}} R_i(\boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{X}_i(t))\} \tag{4.14}$$
$$\text{sub. to}\ \boldsymbol{y}(t+1) = \boldsymbol{y}(t) + \sum_{i=1}^{n} B_i \boldsymbol{x}_i(t) - \boldsymbol{d}(t)$$
$$t = 1, \cdots, T \tag{4.15}$$
$$\boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{a} \tag{4.16}$$
$$\boldsymbol{y}(t+1) \geq 0, \boldsymbol{x}_i(t) \geq 0, t = 1, \cdots, T \tag{4.17}$$

この問題に対する Nash 均衡解は Başar らが定義している離散型動的非協力ゲーム (discrete-time dynamic noncooperative game) に関する開ループ Nash 均衡解 (open-loop Nash equilibrium solution)[8] である．この均衡解が存在するための必要条件は Başar らが与えた定理を拡張した次の定理によって与えられる

定理 4.1 次のような最適化問題が与えられているとする．

$$\text{Min.}\ \sum_{t=1}^{T} f_i(\boldsymbol{y}(t+1), \boldsymbol{x}_i(t)) \tag{4.45}$$
$$\text{sub. to}\ \boldsymbol{y}(t+1) = \boldsymbol{y}(t) + \sum_{j=1}^{n} B_j \boldsymbol{x}_j(t) - \boldsymbol{d}(t)$$
$$t = 1, \cdots, T \tag{4.46}$$
$$\boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{a} \tag{4.47}$$
$$\boldsymbol{y}(t+1) \geq 0, \boldsymbol{x}_i(t) \geq 0, t = 1, \cdots, T \tag{4.48}$$

目的関数 (4.45) と制約条件 (4.46) は $\boldsymbol{x}$ に関して微分可能な連続関数である．このとき $\boldsymbol{x}_i(t), i = 1, \cdots, n, t = 1, \cdots, T$ が開ループ Nash 均衡解でかつ $\boldsymbol{y}(t), t = 1, \cdots, T$ がそのときのシステムの状態を表わしていれば，以下の関係を満たす costate vector $\boldsymbol{\lambda}(t)$ が存在する．

$$\boldsymbol{y}^*(t+1) = \boldsymbol{y}^*(t) + \sum_{j=1}^{n} B_j \boldsymbol{x}_j^*(t) - \boldsymbol{d}(t), t = 1, \cdots, T \tag{4.49}$$
$$\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i(t)} H(\boldsymbol{y}^*(t), \boldsymbol{x}_1^*(t), \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*(t), \boldsymbol{x}_i(t), \boldsymbol{x}_{i+1}^*(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n^*(t)) = 0,$$
$$t = 1, \cdots, T \tag{4.50}$$
$$\boldsymbol{\lambda}(t) = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}(t)} \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^*(t), \boldsymbol{x}_1^*(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n^*(t))^{\mathsf{T}}$$
$$\cdot\{\boldsymbol{\lambda}(t+1) - \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{y}(t+1)} f_i(\boldsymbol{x}_i^*(t), \boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}^*(t), \boldsymbol{x}_1^*(t), \cdots, \boldsymbol{x}_n^*(t))\},$$
$$t = 1, \cdots, T \tag{4.51}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(T+1)=0 \tag{4.52}$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t)\geq 0, t=2,\cdots,T, \boldsymbol{y}^*(1)=\boldsymbol{a} \tag{4.53}$$

ここで $H(\cdot)$ は Hamilton 関数で

$$H_i(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\equiv f_i(\boldsymbol{x}_i(t),\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t)))$$
$$+\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t+1)\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))$$

また

$$\boldsymbol{g}(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))=\boldsymbol{y}(t)+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j(t)-\boldsymbol{d}(t)$$

である. ∎

この定理の証明は，[8] の定理 6.1 の証明と同様に行うことによって証明できるので，ここでは省略する.

式 (4.49)~(4.53) を満たす Nash 均衡解は，一般的に唯一には存在せず，解集合の形で求められる．しかしながら本節で対象としている生産計画問題 (4.14)~(4.17) のように目的関数が 2 次凸関数で制約条件が線形関数，Q が対称行列，R_iの要素が正であれば，開ループ Nash 均衡解は唯一存在し，次の定理が成り立つ.

定理 4.2 生産計画問題 (4.14)~(4.17) において目的関数が 2 次凸関数，制約条件が線形関数，Q が対称行列，R_iの要素が正であれば，式 (4.13) を満たす開ループ Nash 均衡解は唯一存在し，次式で与えられる.

$$\boldsymbol{x}_i^*(t)=-R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}M(t+1)\Gamma^{-1}(t)(\boldsymbol{y}^*(t)-\boldsymbol{Y}(t))$$
$$+R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}\sum_{\tau=t}^{T}(M(\tau)-Q)(D'(\tau)-V(\tau+1))+\boldsymbol{X}_i(t),$$

$$i=1,\cdots,n, t=1,\cdots,T \tag{4.54}$$

$$\boldsymbol{y}^*(t+1)=\Gamma^{-1}(t)(\boldsymbol{y}^*(t)-\boldsymbol{Y}(t))-\Gamma^{-1}(t)(D'(t)-V(t+1))$$
$$+\boldsymbol{Y}(t+1), t=1,\cdots,T \tag{4.55}$$

ここで

$$\Gamma(t)\equiv I+\sum_{i=1}^{n}B_iR_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}M_i(t+1), t=1,\cdots,T \tag{4.56}$$

$$M(t)\equiv Q+M(t+1)\Gamma^{-1}(t), t=1,\cdots,T \tag{4.57}$$

$$V(t)\equiv\sum_{i=1}^{n}B_iR_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}\sum_{\tau=t}^{T}(M_i(\tau)-Q)(D'(\tau)-V(\tau+1)),$$
$$t=1,\cdots,T \tag{4.58}$$

$$M(T+1)=Q, V(T+1)=0 \tag{4.59}$$

$$D'(t)=\boldsymbol{Y}(t+1)-\boldsymbol{Y}(t)-\sum_{i=1}^{n}B_i\boldsymbol{X}_i(t)+\boldsymbol{d}(t), t=1,\cdots,T \tag{4.60}$$

証明　式 (4.14)~(4.17) の生産計画問題に対する Hamilton 関数は次のようである.

$$\begin{aligned}
&H_i(\boldsymbol{y}(t),\boldsymbol{x}_1(t),\cdots,\boldsymbol{x}_n(t))\\
&\equiv\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}(t+1)-\boldsymbol{Y}(t+1))^{\mathsf{T}}Q(\boldsymbol{y}(t+1)-\boldsymbol{Y}(t+1))\\
&\quad+(\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{X}_i(t))^{\mathsf{T}}R_i(\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{X}_i(t))\}\\
&\quad+\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t+1)(\boldsymbol{y}(t)+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j(t)-\boldsymbol{d}(t))\\
&=\frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y}(t)+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j(t)-\boldsymbol{d}(t)-\boldsymbol{Y}(t+1))^{\mathsf{T}}\\
&\quad\cdot Q(\boldsymbol{y}(t)+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j(t)-\boldsymbol{d}(t)-\boldsymbol{Y}(t+1))\\
&\quad+(\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{X}_i(t))^{\mathsf{T}}R_i(\boldsymbol{x}_i(t)-\boldsymbol{X}_i(t))\}\\
&\quad+\boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(t+1)(\boldsymbol{y}(t)+\sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j(t)-\boldsymbol{d}(t))
\end{aligned} \tag{4.61}$$

これを R^{m_i} 上で最小にする $\boldsymbol{x}_i^*(t)$ と $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ は，式 (4.50) と (4.51) より

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^*(t) &= -R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}\{\boldsymbol{\lambda}^*(t+1) + Q(\boldsymbol{y}^*(t+1) - \boldsymbol{Y}(t+1))\}\\ &\quad +\boldsymbol{X}_i(t) \end{aligned}\tag{4.62}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \boldsymbol{\lambda}^*(t+1) + Q(\boldsymbol{y}^*(t+1) - \boldsymbol{Y}(t+1)) \tag{4.63}$$

を得る．

$t = T$ のとき，式 (4.62) は

$$\boldsymbol{x}_i^*(T) = -R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}Q(\boldsymbol{y}^*(T+1) - \boldsymbol{Y}(T+1)) + \boldsymbol{X}_i(T) \tag{4.64}$$

となる．この両辺に B_i を左から乗じ，i について総和を行ない式 (4.15) に代入すると，式 (4.56) を考慮して

$$\boldsymbol{y}^*(T+1) = \Gamma^{-1}(T)(\boldsymbol{y}^*(T) - \boldsymbol{Y}(T)) - \Gamma^{-1}(T)D'(T) + \boldsymbol{Y}(T+1)$$

を得る．これを式 (4.64) に代入すると式 (4.57) を考慮して

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^*(T) &= -R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}M(T+1)\Gamma^{-1}(T)(\boldsymbol{y}^*(T) - \boldsymbol{Y}(T))\\ &\quad +R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}(M(T) - Q)D'(T) + \boldsymbol{X}_i(T)\end{aligned}\tag{4.65}$$

となる．

$t = T-1$ のとき，同様に行うと，次のようになる．

$$\boldsymbol{x}_i^*(T-1) = -R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}\{\boldsymbol{\lambda}^*(T) + Q(\boldsymbol{y}^*(T) - \boldsymbol{Y}(T))\} + \boldsymbol{X}_i(T-1) \tag{4.66}$$

式 (4.63) より

$$\boldsymbol{\lambda}^*(T) = (M(T) - Q)(\boldsymbol{y}^*(T) - \boldsymbol{Y}(T)) - (M(T) - Q)D'(T)$$

であるので，式 (4.66) は

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^*(T-1) &= -R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}M(T)(\boldsymbol{y}^*(T) - \boldsymbol{Y}(T))\\ &\quad +R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}(M(T) - Q)(D'(T) + \boldsymbol{X}_i(T-1)\end{aligned}\tag{4.67}$$

となる．これと式 (4.58) を用いて

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^*(T) &= \Gamma^{-1}(T-1)(\boldsymbol{y}^*(T-1) - \boldsymbol{Y}(T-1))\\ &\quad -\Gamma^{-1}(T-1)(D'(T-1) - V(T)) + \boldsymbol{Y}(T)\end{aligned}$$

を得る．これを式 (4.67) に代入することによって，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^*(T-1) &= -R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}M(T)\Gamma^{-1}(T-1)(\boldsymbol{y}^*(T-1) - \boldsymbol{Y}(T-1))\\ &\quad +R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}\sum_{\tau=T-1}^{T}(M(\tau) - Q)(D'(\tau) - V(\tau+1)) + \boldsymbol{X}_i(T-1)\end{aligned}\tag{4.68}$$

を得る．また

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^*(T-1) &= (M(T-1) - Q)(\boldsymbol{y}^*(T-1) - \boldsymbol{Y}(T-1))\\ &\quad -\sum_{\tau=T-1}^{T}(M(\tau) - Q)(D'(\tau) - V(\tau+1))\end{aligned}$$

次に $t = k$ のとき $k+1$ 期で式 (4.54)，(4.55) が成り立っているものと仮定する．このとき，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^*(k+1) &= (M(k+1) - Q)(\boldsymbol{y}^*(k+1) - \boldsymbol{Y}(k+1))\\ &\quad -\sum_{\tau=k+1}^{T}(M(\tau) - Q)(D'(\tau) - V(\tau+1))\end{aligned}$$

である．これを式 (4.62) に代入すると

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^*(k) &= -R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}M(k+1)(\boldsymbol{y}^*(k+1) - \boldsymbol{Y}(k+1))\\ &\quad +R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}\sum_{\tau=k+1}^{T}(M(\tau) - Q)(D'(\tau) - V(\tau+1))\\ &\quad +\boldsymbol{X}_i(k)\end{aligned}$$

となる．いままでと同様にして，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{y}^*(k+1) &= \Gamma^{-1}(k)(\boldsymbol{y}^*(k) - \boldsymbol{Y}(k)) \\ &\quad -\Gamma^{-1}(k)(D'(k) - V(k+1)) + \boldsymbol{Y}(k+1)\end{aligned}$$

したがって

$$\begin{aligned}\boldsymbol{x}_i^*(k) &= -R_i^{-1}B_i^{\top}M(k+1)\Gamma^{-1}(k)(\boldsymbol{y}^*(k) - \boldsymbol{Y}(k)) \\ &\quad +R_i^{-1}B_i^{\top}\sum_{\tau=k}^{T}(M(\tau) - Q)(D'(\tau) - V(\tau+1)) + \boldsymbol{X}_i(k)\end{aligned}$$

および

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\lambda}^*(k) &= (M(k) - Q)(\boldsymbol{y}^*(k) - \boldsymbol{Y}(k)) \\ &\quad -\sum_{\tau=k}^{T}(M(\tau) - Q)(D'(\tau) - V(\tau+1))\end{aligned}$$

を得る．

$k = T-2$ のとき，$T-1$ 期についてはすでに証明しているので，この場合も式 (4.54)，(4.55) が成り立つ．このことから $k = 1, \cdots, T-3$ のときについても，式 (4.54)，(4.55) が成り立つ．

$t = 1$ のとき，在庫の初期条件 $\boldsymbol{y}(1) = \boldsymbol{a}$ を式 (4.54)，(4.55) に代入すれば，$\boldsymbol{x}_i^*(1), \boldsymbol{y}^*(2)$ を得る．この値を $t = 2$ のときの式 (4.54)，(4.55) に代入すれば $\boldsymbol{x}_i^*(2), \boldsymbol{y}^*(3)$ を得る．このようにして，T 期まで順次代入していくことによって，各期の最適な生産時間と期首在庫を得ることができる．このようにして得た最適解は唯一である． ∎

式 (4.54) は式 (4.14)～(4.17) で表わされる生産計画問題に対する唯一の最適生産時間で，式 (4.55) はそのときの最適期首在庫量である．この両式と式 (4.56)～(4.59) を見ると，初期在庫量 $\boldsymbol{y}(1)$ と各工程の B_i，R_i，Q，$\boldsymbol{d}(t)$ および生産目標が明らかであれば，最適な生産時間と最適な期首在

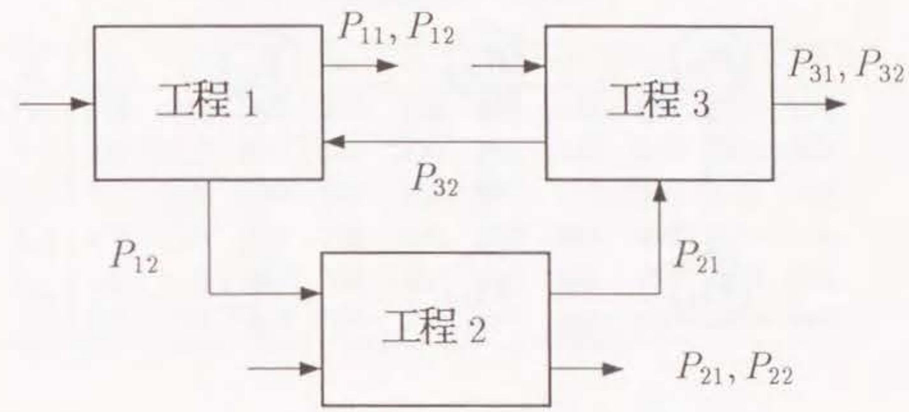


図 4.7 3 工程生産システム

表 4.3 数値計算データ

工　程		工程 1		工程 2		工程 3	
製　品		P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{31}	P_{32}
目標生産時間	(h)	479.25	481.60	478.40	479.95	479.50	477.90
目標在庫量	(pc)	120	174	174	70	148	87
生産率	(pc/h)	2.15	1.12	0.92	3.31	1.37	0.81

庫量を決定することができる．これらの情報は計画時点で既知であるので，各工程の意思決定者は他工程の生産計画に影響されることなく自らの生産計画を最適にすることができる．

4.4.3 数値計算例

目標生産時間が一定の場合　数値計算例のモデルとして，図 4.7のような相互関係が存在する 3 工程生産システムを考える．各工程は図 4.8に示

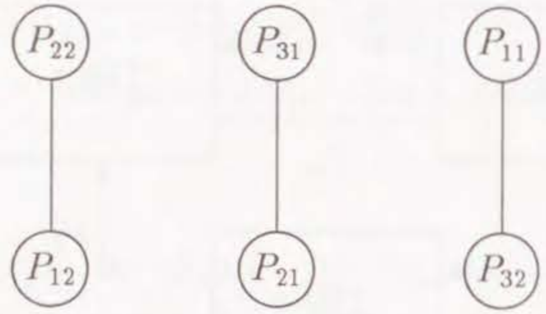


図 4.8 製品構成

す製品構成を持つ 2 種類の製品 $\mathrm{P}_{i\ell}, i = 1, 2, \ell = 1, 2$ を生産しており，計画期間は 10 期間であるとする．管理部門は多期間の生産計画問題を最適化し，その第 1 期の生産時間と第 2 期の期首在庫量を各工程に生産目標として指示するのであるが，この生産目標を工程の生産計画期間の各期ごとに設定しない場合を考える．すなわち，製品の需要量は期ごとに変動するが，期ごとの生産時間の変動をできるだけ少なくするように平滑化をする場合で，生産目標は計画期間を通じて一定とする．本節の場合，各製品の目標生産時間と目標在庫量，および生産率を表 4.3のように設定する．また各製品の各期における顧客の要求に基づく独立需要量は表 4.4のようである．工程間の相互関係を表す行列 $B_i, i = 1, 2, 3$ は次のようである．

表 4.4 独立需要量データ (pc)

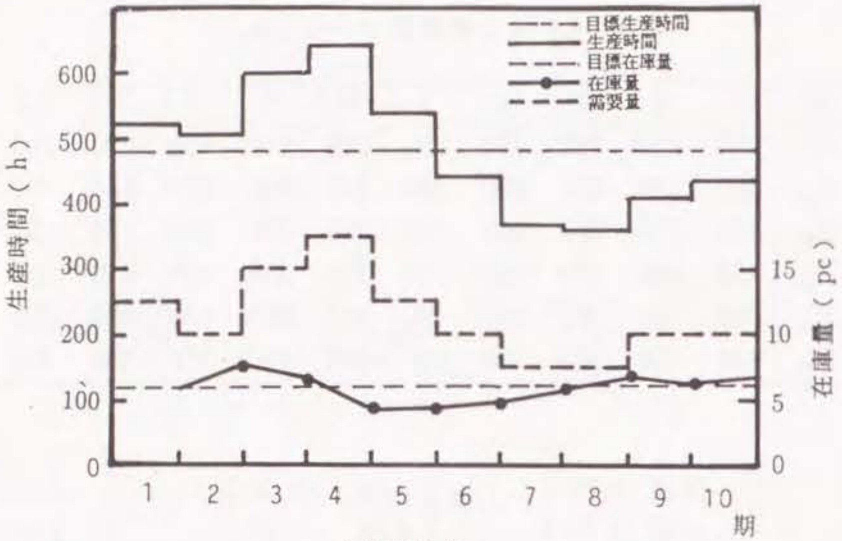
期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_{11}	250	200	300	350	250	200	150	150	200	200
P_{12}	300	250	350	200	200	200	300	400	350	300
P_{21}	100	200	200	150	150	200	250	200	150	150
P_{22}	150	100	100	100	150	150	200	200	150	150
P_{31}	300	300	400	450	450	450	300	250	300	300
P_{32}	400	350	300	300	350	400	450	350	350	400

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2.15 & 0.00 \\ 0.00 & 1.12 \\ \cdots & \cdots \\ 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \\ \cdots & \cdots \\ 0.00 & 0.00 \\ -0.81 & 0.00 \end{bmatrix}, B_2 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & -1.12 \\ \cdots & \cdots \\ 0.92 & 0.00 \\ 0.00 & 3.31 \\ \cdots & \cdots \\ 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \end{bmatrix}, B_3 = \begin{bmatrix} 0.00 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \\ \cdots & \cdots \\ -0.92 & 0.00 \\ 0.00 & 0.00 \\ \cdots & \cdots \\ 1.37 & 0.00 \\ 0.00 & 0.81 \end{bmatrix}$$

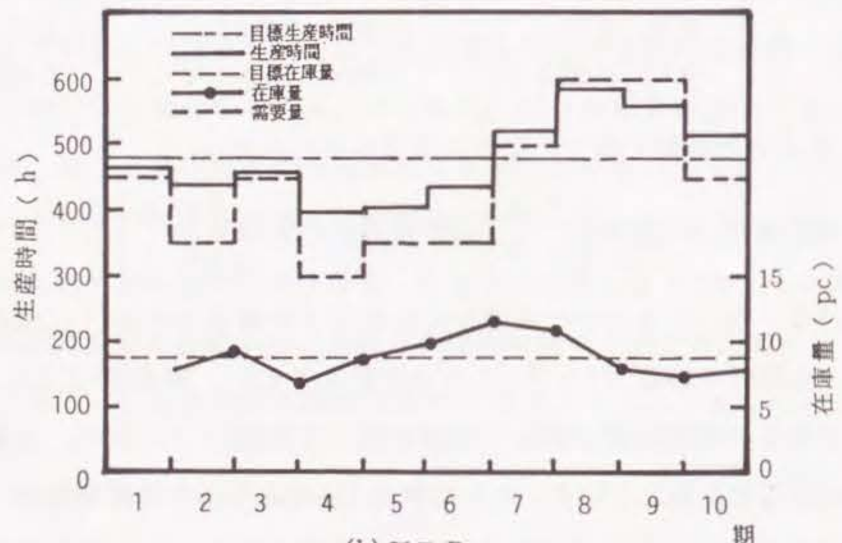
Q'_iと R_iは各工程同じ値で，次のようであるとする．

$$Q'_1 = Q'_2 = Q'_3 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, R_1 = R_2 = R_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

式 (4.54)，(4.55) を用いて各期の生産時間と在庫量を求め，これと生産目標との関係を製品 P_{11}と P_{12}について図示すると，図 4.9のようになる．これをみると生産時間は需要の変動に従って変動しているが，目標生産時間の周辺で変動している．とくに製品 P_{12}のように内部需要を持つ製品は目標生産時間の近傍で変動しており，需要の変動よりもその変動は少ない．在庫量に関しては，目標在庫量の周辺で変動しているが，製品間には生産時間のような差異は認められない．他の製品についても同じことがいえる．



(a) 製品 P_{11}



(b) 製品 P_{12}

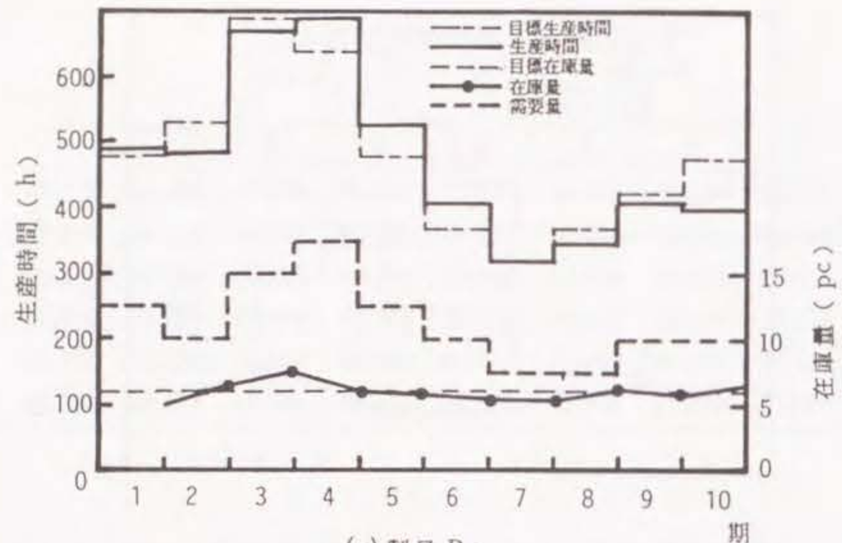
図 4.9 生産時間と在庫量の変動（目標生産時間が一定の場合）

表 4.5 目標生産時間 (h)

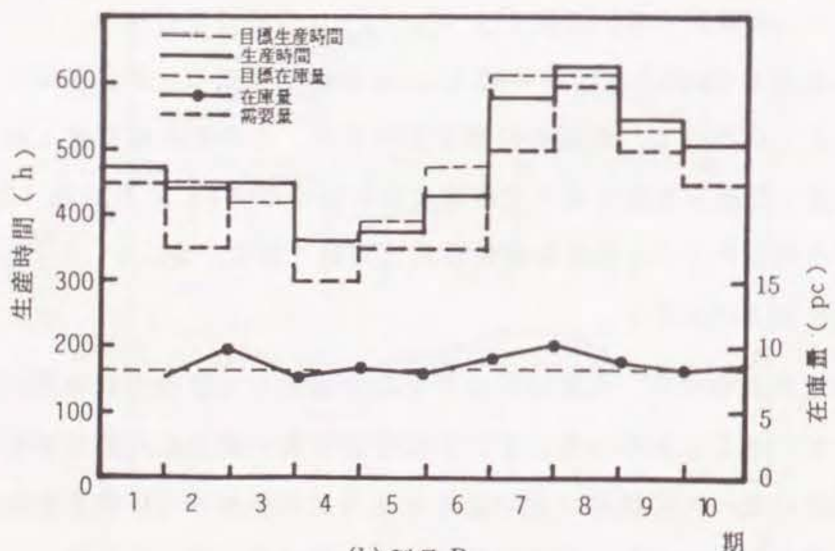
期	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
P_{11}	429.25	532.50	692.25	639.00	479.25	372.75	319.50	372.75	426.00	479.25
P_{12}	448.00	448.00	420.00	364.00	392.00	476.00	616.00	616.00	532.00	504.00
P_{21}	414.00	506.00	552.00	552.00	557.00	552.00	460.00	414.00	391.00	368.00
P_{22}	413.75	331.00	331.00	413.75	496.50	579.25	662.00	579.25	496.50	496.50
P_{31}	411.00	479.50	582.25	616.50	616.50	513.75	376.75	376.75	411.00	411.00
P_{32}	486.00	465.75	506.25	506.25	486.00	486.00	445.50	425.25	465.75	506.25

目標生産時間が各期で異なる場合　先の数値計算例では，生産時間は目標生産時間の周辺で変動しているが，その変動は需要の変動に従っていることがわかった．そこで本項では目標生産時間が各期ごとで異なる場合について検討する．製品 P_{12}，P_{21}，P_{32}は内部需要を持ち，その従属需要量は表 4.4の独立需要量を図 4.8の製品構成に基づく部品展開を行って得ることができる．各期の目標生産時間は，この従属需要量と独立需要量を加えた総需要量を用いて設定されるものとする．これを表 4.5に示す．その他のデータは先の数値計算例と同様である．製品 P_{11}と P_{12}の計算結果を図 4.10に示す．

この結果をみると，生産時間は需要の変動よりも目標生産時間の変化に従っていることがわかる．また内部需要を持つ製品は内部需要を持たない製品に比べて目標値に近い値をとることがわかる．目標生産時間が一定の場合と比べると，生産時間は目標生産時間に従って変動しているが，在庫量は目標在庫量の近傍で変動している．したがって，生産時間の変動を少なくし，平滑化を優先させるのであれば，目標生産を一定にするほうがよい．他方，在庫量の変動を少なくするのであれば，目標生



(a) 製品 P_{11}



(b) 製品 P_{12}

図 4.10 生産時間と在庫量の変動（目標生産時間が異なる場合）

産時間を総需要量に基づいて各期ごとに設定するほうがよい．

4.5 統合問題の解析

4.5.1 生産目標設定方式による統合

前節までに，上位レベルである管理部門と，下位レベルである多段階生産工程の各工程で構成される2階層分権的生産システムを対象に，その生産計画に関する最適化解析を行なってきた．そこでは，生産システム全体に関する多期間生産計画は管理部門によってすでに最適化されており，その第1期の生産時間と第2期の期首在庫量が生産目標として下位レベルの各工程に指示されている場合について，工程間の相互関係を考慮した第1期に関する生産計画の最適化を行なった．これは下位レベルに関する最適化であり，上位レベルを含めた全体的最適化を考慮したものではなかった．そこで本節では，与えられているものとして取り扱ってきた生産目標を下位レベルの各工程を統合するための統合変数として取り扱い，2階層分権的生産システムの全体的最適化を行う．

本節のように目標を統合変数とした階層システムに関する研究には，第2章で述べたように Weitzman [44] や Ruefli が提案した GGD モデル [39, 38]，それを拡張した [20]，[45] が報告されている．これらの研究は，いずれも上位レベルが目標を決定し，下位レベルが目標に対してなんらかの決定を行うという，top-down による統合法である．これは下位レベルの計画決定は上位レベルの計画の範囲内で行なわれるので，上位レベルの制約を強く受けることになる．これに対して，下位レベルが上位レベルの制約を受けることなしに計画決定を行い，上位レベルは下位レベルの計画を考慮して目標を設定する bottom-up の方式が考えられる．こ

の方式では，下位レベルの決定が上位レベルの決定よりも優先され，また計画決定の際に上位レベルの制約を受けないので，先の top-down による方法よりも下位レベルの自律性をより強く認めたものであるといえる．このような bottom-up による方式に関するものとして第 3 章で取り上げたマルチパラメトリック線形計画法を適用した報告 [2] がある．[4] は非協力ゲームにおける Stackelberg 均衡解を求める方法を適用している．この方法では，下位レベルは計画の最適条件を上位レベルに報告するのみで，自らの最適決定は行わないので，上位レベルは下位レベルの決定変数をも同時に決定しなければならない．

本節では，下位レベルの自律性をより強く認めた bottom-up による生産目標設定方式を用いた 2 階層分権的生産システムの統合方式を取り扱う．提案する統合方式の概略は次のようである．下位レベルの各工程は上位レベルの管理部門によって設定される生産目標をパラメータとして取り扱い，最適生産計画を得るための最適条件を求める．管理部門は，下位レベルの各工程から報告された最適条件を考慮して多期間生産計画の最適化を行う．これによって得られた第 1 期の最適生産時間と最適期首在庫量を生産目標として下位レベルの各工程に指示する．各工程は，指示された生産目標を用いて目標からのずれを最小にする最適生産計画を求める．

管理部門の生産計画問題は，4.2 節で定式化した次のような多期間生産計画問題であるとする．

$$\text{Min.}\ z(\boldsymbol{Y}_i(h+1), \boldsymbol{X}_i(h)) = \sum_{h=1}^{H}\sum_{i=1}^{n}(\boldsymbol{c}_{pi}^{\top}\boldsymbol{X}_i(h) + \boldsymbol{c}_{hi}^{\top}\boldsymbol{Y}_i(h+1)) \quad (4.1)$$

$$\text{sub. to}\ \boldsymbol{Y}_i(h+1) = \boldsymbol{Y}_i(h) + \boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(h) - \boldsymbol{D}_i(h),$$

$$i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \quad (4.2)$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\top}\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(h) \le \boldsymbol{b}_i, i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \quad (4.3)$$

$$\boldsymbol{Y}_i(1) = \boldsymbol{a}_i, i = 1, \cdots, n \quad (4.4)$$

$$\boldsymbol{X}_i(h) \ge 0, \boldsymbol{Y}_i(h+1) \ge 0$$

$$i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \quad (4.5)$$

工程の計画期間は単一期間であるとし，その生産計画問題は 4.3 節で定式化したように次のようなものであるとする．

$$\text{Min.}\ f_i(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x}_i) = \frac{1}{2}\{(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Y})^{\top}Q(\boldsymbol{y} - \boldsymbol{Y})$$

$$+(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)^{\top}R_i(\boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{X}_i)\} \quad (4.21)$$

$$\text{sub. to}\quad \boldsymbol{y} = \boldsymbol{y}^0 + \sum_{j=1}^{n}B_j\boldsymbol{x}_j - \boldsymbol{D} \quad (4.22)$$

$$\boldsymbol{y} \ge 0, \boldsymbol{x}_i \ge 0 \quad (4.23)$$

4.5.2 下位レベルの生産計画問題の最適化

4.2.4 項で述べたように，本節の統合問題は上位レベルである管理部門に意思決定の優先権が存在する場合の均衡問題である．管理部門が設定する生産目標 $\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{Y}$ をパラメータとすると，式 (4.21)~(4.23) で定式化した下位レベルの各工程に関する単一期間生産計画問題は，目的関数にベクトル・パラメータが存在する 2 次計画問題となる．すなわち，工程の生産計画問題 (4.21)~(4.23) は，次のような目的関数にベクトルパラメータ $\boldsymbol{\theta}$ が存在する 2 次計画問題と等価である．

$$\text{Min.}\ f(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{2}(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\theta})^{\top}C(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\theta}) \quad (4.69)$$

$$\text{sub. to}\ A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b} \quad (4.70)$$

$$\boldsymbol{x} \ge 0 \quad (4.71)$$

この問題に対する Lagrange 関数は次のようである．

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\lambda}) \equiv \frac{1}{2}(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta})^{\mathsf{T}} C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta}) - \boldsymbol{\lambda}^{\mathsf{T}}(A\boldsymbol{x}-\boldsymbol{b})$$

ここで$\boldsymbol{\lambda}$は Lagrange 乗数である．いま

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{x}} = C(\boldsymbol{x}-\boldsymbol{\theta}) - A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda} = -\boldsymbol{\pi}$$

とおくと，最適条件は次のようになる．

$$-C\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\pi} + A^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda} = -C\boldsymbol{\theta} \tag{4.72}$$

$$A\boldsymbol{x} - \boldsymbol{b} = 0 \tag{4.73}$$

$$\boldsymbol{x}^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi} = 0 \tag{4.74}$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0, \boldsymbol{\lambda} \geq 0 \tag{4.75}$$

任意の$\boldsymbol{\theta}^0$に対して，上記の最適条件を満たす$\boldsymbol{x}^0$，$\boldsymbol{\lambda}^0$が存在するものと仮定する．$\boldsymbol{x}^0$を基底変数$\boldsymbol{x}_B^0$と非基底変数$\boldsymbol{x}_N^0$に分割し，C，A，$\boldsymbol{\pi}$についても同様に分割する．すなわち

$$C = \begin{bmatrix} C_{11}, & C_{12} \\ C_{21}, & C_{22} \end{bmatrix} = (C_B, C_N), A = (B, N), \boldsymbol{\pi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\pi}_B \\ \boldsymbol{\pi}_N \end{bmatrix}$$

これらを用いて最適条件 (4.72)~(4.75) を次のように書き換える．

$$-C_{11}\boldsymbol{x}_B^0 - C_{12}\boldsymbol{x}_N^0 - \boldsymbol{\pi}_B + B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}^0 = -C_B^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\theta} \tag{4.76}$$

$$-C_{21}\boldsymbol{x}_B^0 - C_{22}\boldsymbol{x}_N^0 - \boldsymbol{\pi}_N + N^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\lambda}^0 = -C_N^{\mathsf{T}}\boldsymbol{\theta} \tag{4.77}$$

$$B\boldsymbol{x}_B^0 + N\boldsymbol{x}_N^0 = \boldsymbol{b} \tag{4.78}$$

$$\boldsymbol{x}_B^{0\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}_B + \boldsymbol{x}_N^{0\mathsf{T}}\boldsymbol{\pi}_N = 0 \tag{4.79}$$

$$\boldsymbol{x}_B^0 \geq 0, \boldsymbol{x}_N^0 \geq 0, \boldsymbol{\lambda}^0 \geq 0 \tag{4.80}$$

これをシンプレックス表の形式で表わすと表 4.6のようになる．この表は 3.4 節の制約式右辺にベクトル・パラメータが存在する 2 次計画問題の初

表 4.6 シンプレックス表

		$\boldsymbol{\theta}$	$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{x}_N$	$\boldsymbol{\pi}_B$	$\boldsymbol{\pi}_N$	$\boldsymbol{\lambda}$
$\boldsymbol{\pi}_B$		C_B	C_{11}	C_{12}	I		$-B^{\mathsf{T}}$
$\boldsymbol{\pi}_N$		C_N	C_{21}	C_{22}		I	$-N^{\mathsf{T}}$
$\boldsymbol{x}_B$	$\boldsymbol{b}$		B	N			

期表と同じ形式である．したがって，目的関数にベクトル・パラメータが存在する 2 次計画問題は，3.4 節で明らかにした手続きと同様に行うことによって解くことができる．工程の生産計画問題 (4.21)~(4.23) をこのようにして解くことができれば，関数Φを生産目標$\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{Y}$の関数として陽的に得ることができ，統合問題の最適化を容易に行うことができる．

工程の単一期間生産計画問題の最適化解析は 4.3 節ですでに行なっている．そこで得た最適解は次のようである．

$$\boldsymbol{y}^* = \Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V + \boldsymbol{Y} \tag{4.31}$$

$$\boldsymbol{x}_i^* = -2R_i^{-1}B_i^{\mathsf{T}}Q\{\Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0 - \boldsymbol{Y}) + V\} + \boldsymbol{X}_i \tag{4.32}$$

ここで

$$\Gamma \equiv I + 2\sum_{j=1}^{n} B_j R_j^{-1} B_j^{\mathsf{T}} Q$$

$$V \equiv \Gamma^{-1}(\sum_{j=1}^{n} B_j \boldsymbol{X}_j - \boldsymbol{D})$$

である．式 (4.31) と (4.32) によって工程 i の最適解$\boldsymbol{x}_i^*$，$\boldsymbol{y}^*$を生産目標$\boldsymbol{X}_i$，$\boldsymbol{Y}$の関数として表すことができた．これを$\boldsymbol{x}_i^*(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$，$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y})$と記述することにする．工程 i の最適解が実行可能であるためには$\boldsymbol{x}_i^*(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \geq 0$，$\boldsymbol{y}^*(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \geq 0$でなければならない．したがって，管理部門はこの非負条件を満たす範囲内に存在するように生産目標を決定しなければならない．

この生産目標の範囲を R_{Fi} で表わし，以下のように定義する．

$$R_{Fi} \equiv \{(\boldsymbol{X}_i, \boldsymbol{Y}) \mid -2R_i^{-1}B_i^{\top}Q_i\{\Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{Y})+V\}+\boldsymbol{X}_i \geq 0,$$
$$\Gamma^{-1}(\boldsymbol{y}^0-\boldsymbol{Y})+V+\boldsymbol{Y}\geq 0\}, i=1,\cdots,m \qquad (4.81)$$

この R_{Fi} は，$\Sigma_{i=1}^{n} m_i \times \Sigma_{i=1}^{n} m_i$ 空間に存在する閉凸集合である．

管理部門が生産目標をこの範囲内に収まるように決定すれば，式 (4.31)，(4.32) によって与えられる解は常に最適である．$(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})\in R_{Fi}$ のとき，式 (4.31)，(4.32) で求められる解の中で基底変数の集合を $S_i^{(0)}$，非基底変数の集合を $\overline{S}_i^{(0)}$，$(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})$ の範囲を $R_{Fi}^{(0)}$ とする．$(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})\notin R_{Fi}^{(0)}$ のとき $S_i^{(0)}$ に含まれる変数の 1 つが等号で成り立ち，$\overline{S}_i^{(0)}$ に含まれる変数の 1 つが不等号で成り立つ．それらの変数が入れ替わって新しい変数の集合 $S_i^{(1)}$ と $\overline{S}_i^{(1)}$ が作られる．このときの生産目標 $(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})$ の範囲を $R_{Fi}^{(1)}$ とする．3.4 節の場合と同様に，$(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})$ の値によっては変数の入れ替わりがなく，S_i と $\overline{S}_i$ の要素が増加，あるいは減少のみの場合がある．このように集合 $S_i^{(k_i)}$，$\overline{S}_i^{(k_i)}$ において 1 対の変数の入れ替わり，ないし 1 つの変数の増減によって新しい集合 $S_i^{(k_i+1)}$，$\overline{S}_i^{(k_i+1)}$ が得られるとき，それぞれの集合に対応する $(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})$ の範囲を $R_{Fi}^{(k_i)}$，$R_{Fi}^{(k_i+1)}$ とする．1 対の変数の入れ替わり，ないし 1 つの変数の増減によって $R_{Fi}^{(k_i)}$ から $R_{Fi}^{(k_i+1)}$ に移ることができ，またその逆もいえるとき，3 章と同様に $R_{Fi}^{(k_i)}$ と $R_{Fi}^{(k_i+1)}$ は隣接していると呼ぶことにする．

生産目標 $(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})$ を可能な範囲で変化させたとき，工程 i における $R_{Fi}^{(k_i)}$ が K_i 個存在するものとする．$(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})\in R_{Fi}^{(k_i)}$，$k=1,\cdots,K_i$ に対する工程 i の最適解を $\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}$，$\boldsymbol{y}^{(k_i)}$ とする．式 (4.31)，(4.32) を考慮して，$\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}$，$\boldsymbol{y}^{(k_i)}$ を以下のように表すことにする．

$$\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{1ij}^{(k_j)}\boldsymbol{X}_j+\boldsymbol{b}_{1i}^{(k_i)}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{c}_{1i}^{(k_i)} \qquad (4.82)$$

$$\boldsymbol{y}^{(k_i)}=\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{2j}^{(k_j)}\boldsymbol{X}_j+\boldsymbol{b}_{2}^{(k_i)}\boldsymbol{Y}+\boldsymbol{c}_{2}^{(k_i)} \qquad (4.83)$$

上式は 4.2.4 項で述べた関数Φを与えている．また生産目標が存在する範囲も次のように表すことにする．

$$R_{Fi}^{(k_i)}=\{(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y}) \mid -\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{1ij}^{(k_j)}\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{b}_{1i}^{(k_i)}\boldsymbol{Y}\leq \boldsymbol{c}_{1i}^{(k_i)},$$
$$-\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{2j}^{(k_j)}\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{b}_{2}^{(k_i)}\boldsymbol{Y}\leq \boldsymbol{c}_{2}^{(k_i)}\}, i=1,\cdots,n \qquad (4.84)$$

この $R_{Fi}^{(k_i)}$ は工程の最適生産計画を与える生産目標 $(\boldsymbol{X}_i,\boldsymbol{Y})$ の条件である．下位レベルの各工程はこの条件を管理部門に報告することによって，管理部門が行う多期間生産計画の最適化に関与することができる．

4.5.3 生産目標設定方式による統合

管理部門は下位レベルの各工程が決定した最適条件である K_i 個の範囲 $R_{Fi}^{(k_i)}$ を考慮して，自らの多期間生産計画問題の最適化を行う．これを行うには，式 (4.84) より

$$-\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{1ij}^{(k_j)}\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{b}_{1i}^{(k_i)}\boldsymbol{Y}\leq \boldsymbol{c}_{1i}^{(k_i)} \qquad (4.85)$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\boldsymbol{a}_{2j}^{(k_j)}\boldsymbol{X}_j-\boldsymbol{b}_{2}^{(k_i)}\boldsymbol{Y}\leq \boldsymbol{c}_{2}^{(k_i)} \qquad (4.86)$$

を管理部門の多期間生産計画問題 (4.1)~(4.5) の制約条件に加える必要がある．しかしながら，この範囲は工程ごとに K_i 個存在するので，管理部門の生産計画問題は $\prod_{i=1}^{n} K_i$ 組存在することになる．そこで各工程によって報告される範囲 $R_{Fi}^{(k_i)}, i=1,\cdots,n$ の中から $\bigcap_{i=1}^{n} R_{Fi}^{(k_i)} \neq \phi$ となるような任意の範囲を選ぶ．これを $R_{Fi}^{(\hat{k}_i)}$ とする．管理部門の制約条件 (4.2)~(4.5) を満たす各工程の範囲の組合せが J 組存在するものとし，これを $\omega_\zeta, \zeta=$

$1, \cdots, J, (1 \leq J \leq \prod_{i=1}^{n} K_i)$ で表わす．ω_ζを構成する範囲の添字集合を I_ζ とする．すなわち

$$\omega_\zeta = \bigcap_{i=1}^{n} R_{Fi}^{(\hat{k}_i)} \bigcap M, \quad \hat{k}_i \in I_\zeta, \quad \zeta = 1, \cdots, J \tag{4.87}$$

ここで Mは管理部門の制約条件によって作られる範囲で

$$M = \{(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) \mid \boldsymbol{Y}_i(1) + \boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(1) - \boldsymbol{Y}_i(2) = \boldsymbol{D}_i(1),$$
$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\top}\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(1) \leq \boldsymbol{b}_i, \boldsymbol{X}_i(1) \geq 0, \boldsymbol{Y}_i(2) \geq 0, i = 1, \cdots, n\}$$

である．$\Omega = \cup_{\zeta=1}^{J}\omega_\zeta$とすると，明らかに$\Omega \subseteq M$である．$\Omega = M$であれば，$J$個の範囲$\omega_\zeta$は Mを J個の部分領域に分割する．式 (4.1)~(4.5) で定式化した管理部門の生産計画問題は線形計画問題であるので，その最適解は Mの境界上の端点に存在する．他方，$\Omega \subset M$であれば，管理部門の制約条件はΩによって規定され，工場の最適解はΩの境界上に存在する端点によって与えられる．したがって，管理部門の生産計画問題は次のように書き換えることができる．

$$\text{Min. } z(\boldsymbol{Y}_i(h+1), \boldsymbol{X}_i(h)) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{h=1}^{H}(\boldsymbol{c}_{pi}^{\top}\boldsymbol{X}_i(h) + \boldsymbol{c}_{hi}^{\top}\boldsymbol{Y}_i(h+1)) \tag{4.88}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{Y}_i(h+1) = \boldsymbol{Y}_i(h) + \boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(h) - \boldsymbol{D}_i(h),$$
$$i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \tag{4.89}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_i^{\top}\boldsymbol{p}_i\boldsymbol{X}_i(h) \leq \boldsymbol{b}_i, i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \tag{4.90}$$

$$\boldsymbol{Y}_i(1) = \boldsymbol{a}_i, \quad (\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) \in \Omega \tag{4.91}$$

$$\boldsymbol{X}_i(h) \geq 0, \boldsymbol{Y}_i(h+1) \geq 0, i = 1, \cdots, n, h = 1, \cdots, H \tag{4.92}$$

以上の展開から，最適解を得るためのアルゴリズムは次のようになる．

ステップ 1：工程の生産計画問題 (4.21)~(4.23) にマルチパラメトリック 2 次計画法を適用し，各工程の生産計画 $\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2))$，$y_i^{(k_i)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2))$

表 4.7 3 工程生産システムの数値計算データ

製品		P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{31}
原材料の使用量	(kg/pc)	0.33	0.46	0.67	0.42	0.63	0.80
生産率	(pc/h)	3.0	2.2	1.5	2.4	1.6	1.25
初期在庫量	(pc)	10	25	10	10	5	12
単位生産費用	(千円/pc)	3	2	4	3.5	3	2.5
単位在庫費用	(千円/pc)	1.5	0.8	1	1.5	1	1

と生産目標が存在する範囲 $R_{Fi}^{(k_i)}$を求める．各工程は，この範囲を管理部門に報告する．

ステップ 2：管理部門はω_ξとΩを求め，生産計画問題の制約条件に加える．

ステップ 3：管理部門は，生産計画問題 (4.88)~(4.92) を解き，各期の最適な生産時間$\boldsymbol{X}_i^*(h)$ と期首在庫量$\boldsymbol{Y}_i^*(h+1)$，$h = 1, \cdots, H$を求める．

ステップ 4：管理部門は，第 1 期の生産時間$\boldsymbol{X}_i^*(1)$ と第 2 期の期首在庫量$\boldsymbol{Y}_i^*(2)$ を生産目標として各工程に提示する．各工程は提示された生産目標を用いて最適な生産計画を求める．

4.5.4 数値計算例

ここでは 4.3 節で取り扱った 3 工程生産システムの数値計算例に本節で提案した方法を適用する．資源は各製品に共通する原材料であるとし，その利用可能量は 1,010kg であるとする．数値計算に必要なデータを表 4.7 に示す．また工場の生産計画期間は 5 期間 $(H = 5)$ であるとし，各製品の需要量は表 4.8のようであるとする．生産目標からのずれに対するペナルティは，すべての製品について $q_{..} = 0.5, r_{..} = 1.0$ とする．

表 4.8 需要量データ (pc)

期	1	2	3	4	5
P_{11}	305	301	290	297	300
P_{12}	326	340	300	290	296
P_{21}	239	216	204	225	234
P_{22}	103	128	120	154	130
P_{23}	100	105	100	94	110
P_{31}	197	215	220	210	210

ステップ 1：式 (4.82) と (4.83) で表わされる生産計画 $\boldsymbol{x}_i^{(k_i)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2))$, $\boldsymbol{y}_i^{(k_i)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2))$，および式 (4.84) で表わされる範囲 $R_{Fi}^{(k_i)}$ を各工程について求めると，実行可能な範囲は各工程それぞれ 1 組のみで，次のようである．

工程 1：

$$
\begin{aligned}
x_{11}^{(1_1)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= 0.29X_{11}(1) - 0.02X_{23}(1) - 0.04X_{31}(1) \\
&\quad +0.91Y_{11}(2) + 0.01Y_{23}(2) - 0.05Y_{31}(2) + 35.76 \\
x_{12}^{(1_1)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= 0.36X_{12}(1) + 0.25X_{22}(1) \\
&\quad +0.72Y_{12}(2) - 0.11Y_{22}(2) + 98.10 \\
y_{11}^{(1_1)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= -0.15X_{11}(1) - 0.07X_{23}(1) - 0.12X_{31}(1) \\
&\quad -0.29Y_{11}(2) + 0.04Y_{23}(2) - 0.15Y_{31}(2) + 107.29 \\
y_{12}^{(1_1)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= -0.18X_{12}(1) - 0.13X_{22}(1) \\
&\quad -0.36Y_{12}(2) + 0.05Y_{22}(2) + 100.95
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{F1}^{(1_1)} = \{&(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}(2)) \mid \\
&0.29X_{11}(1) - 0.02X_{23}(1) - 0.40X_{31}(1) + 0.91Y_{11}(2)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&+0.01Y_{23}(2) - 0.05Y_{31}(2) \geq 35.76, \\
&0.36X_{12}(1) + 0.25X_{22}(1) + 0.72Y_{12}(2) - 0.11Y_{22}(2) \geq 98.10, \\
&0.46X_{21}(1) + 0.69Y_{21}(2) \geq 70.15, \\
&-0.05X_{12}(1) + 0.32X_{22}(1) - 0.11Y_{12}(2) + 0.87Y_{22}(2) \geq 47.62, \\
&\boldsymbol{X}_i(1) \geq 0, i = 1, 2, 3, \boldsymbol{Y}(2) \geq 0\}
\end{aligned}
$$

工程 2：

$$
\begin{aligned}
x_{21}^{(1_2)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= 0.46X_{21}(1) + 0.69Y_{21}(2) + 70.15 \\
x_{22}^{(1_2)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= -0.05X_{12}(1) + 0.32X_{22}(1) \\
&\quad -0.11Y_{12}(2) + 0.87Y_{22}(2) + 47.62 \\
x_{23}^{(1_2)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= -0.04X_{11}(1) + 0.39X_{23}(1) - 0.11X_{31}(1) \\
&\quad -0.01Y_{11}(2) + 0.76Y_{23}(2) - 0.14Y_{31}(2) + 46.53 \\
y_{21}^{(1_2)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= -0.31X_{21}(1) - 0.46Y_{21}(2) + 105.23 \\
y_{22}^{(1_2)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= -0.13X_{12}(1) - 0.24X_{22}(1) \\
&\quad -0.25Y_{12}(2) - 0.32Y_{22}(2) + 114.29 \\
y_{23}^{(1_2)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= -0.07X_{11}(1) - 0.38X_{23}(1) - 0.18X_{31}(1) \\
&\quad +0.02Y_{11}(2) - 0.39Y_{23}(2) - 0.22Y_{31}(2) + 74.44
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
R_{F2}^{(1_2)} = \{&(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}(2)) \mid \\
&-0.04X_{11}(1) + 0.39X_{23}(1) - 0.11X_{31}(1) \\
&+0.01Y_{11}(2) + 0.76Y_{23}(2) - 0.14Y_{31}(2) \geq 46.53, \\
&0.15X_{11}(1) + 0.22X_{23}(1) + 0.40X_{31}(1) \\
&-0.05Y_{11}(2) - 0.14Y_{23}(2) + 0.50Y_{31}(2) \geq 1222.37, \\
&-0.15X_{11}(1) - 0.07X_{23}(1) - 0.12X_{31}(1) \\
&-0.29Y_{11}(2) + 0.04Y_{23}(2) - 0.15Y_{31}(2) \geq 107.29,
\end{aligned}
$$

$$-0.18X_{12}(1) - 0.13X_{22}(1) - 0.36Y_{12}(2) + 0.05Y_{22}(2) \leq 100.95,$$
$$-0.31X_{21}(1) - 0.46Y_{21}(2) \leq 105.23,$$
$$-0.13X_{12}(1) - 0.24X_{22}(1) - 0.25Y_{12}(2) - 0.32Y_{22}(2) \leq 114.29,$$
$$\boldsymbol{X}_i(1) \geq 0, i = 1,2,3, \boldsymbol{Y}(2) \geq 0\}$$

工程３：

$$\begin{aligned}
x_{31}^{(1_3)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= 0.15X_{11}(1) + 0.22X_{23}(1) + 0.40X_{31}(1) \\
&\quad -0.05Y_{11}(2) + 0.14Y_{23}(2) + 0.50Y_{31}(2) + 122.37 \\
y_{31}^{(1_3)}(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) &= -0.12X_{11}(1) - 0.18X_{23}(1) - 0.32X_{31}(1) \\
&\quad +0.04Y_{11}(2) + 0.11Y_{23}(2) - 0.40Y_{31}(2) + 50.10
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_{F3}^{(1_3)} = \{&(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}(2)) \mid \\
&-0.07X_{11}(1) - 0.38X_{23}(1) - 0.18X_{31}(1) \\
&+0.02Y_{11}(2) - 0.39Y_{23}(2) - 0.22Y_{31}(2) \leq 74.44, \\
&-0.12X_{11}(1) - 0.18X_{23}(1) - 0.32X_{31}(1) \\
&+0.04Y_{11}(2) + 0.11Y_{23}(2) - 0.40Y_{31}(2) \leq 50.10, \\
&\boldsymbol{X}_i(1) \geq 0, i = 1,2,3, \boldsymbol{Y}(2) \geq 0\}
\end{aligned}$$

ステップ２：$\omega_1 = \cap R_{F1}^{(1_1)} \cap R_{F2}^{(1_2)} \cap R_{F3}^{(1_3)} \cap M$, $(1_1, 1_2, 1_3) \in I_1$

$$\begin{aligned}
M = \{(\boldsymbol{X}_i(1), \boldsymbol{Y}_i(2)) \mid\ & Y_{11}(2) - 3.0X_{11}(1) - 10 = 305 \\
& Y_{12}(2) - 2.2X_{12}(1) - 25 = 326 \\
& Y_{21}(2) - 1.5X_{21}(1) - 10 = 239 \\
& Y_{22}(2) - 2.4X_{22}(1) - 10 = 103 \\
& Y_{23}(2) - 1.6X_{23}(1) - \ \ 5 = 100 \\
& Y_{31}(2) - 1.25X_{31}(1) - 12 = 197 \\
& X_{11}(1) + X_{12}(1) + X_{21}(1) \\
& +X_{22}(1) + X_{23}(1) + X_{31}(1) = 1,010\}
\end{aligned}$$

表 4.9 工場の最適生産計画

期			1	2	3	4	5
P_{11}	生産時間	(h)	168.15	163.85	170.12	169.57	169.24
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0
P_{12}	生産時間	(h)	150.00	170.00	150.00	145.00	145.00
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0
P_{21}	生産時間	(h)	152.00	144.00	136.00	150.00	156.00
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0
P_{22}	生産時間	(h)	175.00	195.00	175.00	185.00	175.00
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0
P_{23}	生産時間	(h)	195.28	184.72	200.36	191.07	198.58
	在庫量	(pc)	25	0	1	2	0
P_{31}	生産時間	(h)	167.56	152.44	176.46	169.36	166.18
	在庫量	(pc)	0	0	0	0	0

ステップ３：管理部門の生産計画問題の制約条件にΩを追加し，修正した管理部門の生産計画問題を解くと，表 4.9に示すような最適な生産計画を得た．

ステップ４：表 4.9より，各工程に対する生産目標は次のようである．

$$\begin{aligned}
\text{工程1：}\quad & X_{11}(1) = 168.15(\mathrm{h}),\ Y_{11}(2) = 0(\mathrm{pc}) \\
& X_{12}(1) = 150.00(\mathrm{h}),\ Y_{12}(2) = 0(\mathrm{pc}) \\
\text{工程2：}\quad & X_{21}(1) = 152.00(\mathrm{h}),\ Y_{21}(2) = 0(\mathrm{pc}) \\
& X_{22}(1) = 175.00(\mathrm{h}),\ Y_{22}(2) = 0(\mathrm{pc}) \\
& X_{23}(1) = 195.28(\mathrm{h}),\ Y_{23}(2) = 25(\mathrm{pc}) \\
\text{工程3：}\quad & X_{31}(1) = 167.56(\mathrm{h}),\ Y_{31}(2) = 0(\mathrm{pc})
\end{aligned}$$

これをステップ１で求めた生産計画$\boldsymbol{x}_i^{(1_i)}$と$\boldsymbol{y}_i^{(1_i)}$に代入して，各工程の最適な生産計画を求めると，表 4.10のようになる．

表 4.10 工程の最適生産計画

工　程		工程 1		工程 2			工程 3
製　品		P_{11}	P_{12}	P_{21}	P_{22}	P_{23}	P_{31}
生産時間	(h)	168.15	150.00	152.00	175.00	195.28	167.56
在庫量	(pc)	0	0	0	0	0	25

4.6 結言

本章で得られた結果を要約すれば以下のようである．

(1) 分権的生産システムのミクロ・モデルに対して，生産目標設定方式による統合法を提案した．さらにミクロ・モデルを多段階生産システムの生産計画問題として定式化し，これを工程間の相互関係を満たす均衡問題として取り扱い，非協力ゲームにおける Nash 均衡解が適用できることを示した．

(2) ミクロ・モデルの単一期間生産計画問題と多期間生産計画問題の最適化解析を非協力ゲームの理論に基づいて行い，それによって最適性の必要条件を導き，生産目標からのずれを最小にする Nash 均衡解を求めた．

(3) 管理部門による統合問題に対して，マルチパラメトリック 2 次計画法を適用することによって，工程の生産計画案を求めることができることを示した．それを用いて，管理部門と工程間の均衡解を得るための統合法を提案した．

(4) 数値計算例によって提案した方法の妥当性を示した．

参考文献

[1] 荻野剛二郎： 機能分担による階層制御． 電子情報通信学会論文誌 Vol.J70-A, No.5, pp.744–753， 1987．

[2] 志水清孝，安西祐一郎：地方自治権をもつ階級制システムの最適化．計測自動制御学会論文集 Vol.10, No.1, pp.63–70， 1974．

[3] 田村隆善：多品目・多段階生産システムの生産計画問題に対する一解法．日本機械学会論文集（C）編 Vol.54, No.504, pp.1974–1982, 1988．

[4] G. Anandalingam : A mathematical programming models of decentralized multi-level systems. *J. of Operations Research Society* Vol.39, No.11, pp.1021–1033, 1988.

[5] H. Andersson, S. Axsäter, and H. Jönsson : Hierarchical material requirement planning. *International J. of Production Research* Vol.19, No.1, pp.79–89, 1981.

[6] S. Axsäter : On the feasiblity of aggregate production plans. *Operations Research* Vol.34, No.5, pp.796–800, 1986.

[7] S. Axsäter and H. Jönsson : Aggregation and disaggregation in hierarchical production planning. *European J. of Operational Research* Vol.17, No.3, pp.338–350, 1984.

[8] T Başar and G.J. Olsder : *Dynamic Noncooperative Game Theory.* Academic Press, 1982.

[9] A. Bensoussan, M. Crouhy, and J-M. Proth : *Mathematical Theory of Production Planning.* North-Holland, 1983.

[10] G.R. Bitran, E.A. Hass, and A.C. Hax : Hierarchical production planning: a single stage system. *Operations Research* Vol.29, No.4, pp.717–743, 1981.

[11] G.R. Bitran, E.A. Hass, and A.C. Hax : Hierarchical production planning: a two-stage system. *Operations Research* Vol.30, No.2, pp.232–251, 1982.

[12] G.R. Bitran and A.C. Hax : Disaggregation and resource allocation using convex knapsack problems with bounded variables. *Management Science* Vol.27, No.4, pp.431–441, 1981.

[13] G.R. Bitran and A.C. Hax : On the design of hierarchical production planning systems. *Decision Sciences* Vol.8, No.1, pp.28–54, 1977.

[14] M.R. Bowers : A hierarchical production planning and schduling model. *Decision Science* Vol.23, No.1, pp.144–159, 1992.

[15] M. Brdyś and P.D. Roberts : Optimal structures for steady-state adaptive optimizing control of large-scale industril processes. *International J. of Systems Science* Vol.17, No.10, pp.1449–1474, 1986.

[16] C-H. Chung, I-J. Chen, and G.L.Y. Gheng : Planning horizons for multi-item hierarchical production scheduling problems: a heuristic search procedure. *European J. of Operational Research* Vol.37, No.3, pp.368–377, 1988.

[17] M.A.H. Dempster, M.L. Fisher, L. Jansen, B.J. Lageweg, J.K. Lenstra, and A.H.H. Rinnoy Kan : Analytical evaluation of hierarchical planning systems. *Operations Research* Vol.29, No.4, pp.707–716, 1981.

[18] G. Feichtinger : Differential game models in management science. *European J. of Operational Research* Vol.14, No.2, pp.137–155, 1983.

[19] G. Feichtinger : The Nash solution of a maintenance-production differential game. *European J. of Operational Research* Vol.10, No.2, pp.165–172, 1982.

[20] J.R. Freeland and N.R. Baker : Goal partitioning in hierarchical organization. *OMEGA* Vol.3, No.6, pp.673–688, 1975.

[21] H. Gabbay : Muliti-stage production planning. *Management Science* Vol.25, No.11, pp.1138–1148, 1979.

[22] S.C. Graves : Using Lagrangean techniques to solve hierarchical production planning problems. *Management Science* Vol.28, No.3, pp.260–275, 1982.

[23] W.A. Gruver and B.E. Smith : Decentralized optimal control of multistage production processes. *International J. on Policy and Information* Vol.4, pp.33–41, 1980.

[24] Y.Y. Haimes, K. Tarvainen, T. Shima, and J. Thadathil : *Hierarchical Multiobjective Analysis of Large-Scale Systems.* Hemisphere Publishing, 1990.

[25] A.C. Hax and D. Candea : *Production and Inventory Management.* Prentice-Hall, 1984.

[26] A.C. Hax and J.J. Golovin : Hierarchical production planning systems. In A.C. Hax, editor, *Studies in Operations Management*, chapter 14, pages 400–428, North Holland, 1978.

[27] A.C. Hax and H.C. Meal : Hierarchical integration of production planning and scheduling. In M. Geisler, editor, *TIMS Studies in Management Science, Vol.1, Logistics*, North Holland, 1975.

[28] S. Jørgensen: Optimal production, purchasing and pricing: a differential game approach. *European J. of Operational Research* Vol.24, No.1, pp.64–76, 1986.

[29] S. Jørgensen : A pareto-optimal solution of a maintenance-production differential game. *European J. of Operational Research* Vol.18, No.1, pp.76–80, 1984.

[30] H. Kunreuther : Production-planning algorithms for the inventory-overtime tradeoff. *Operations Research* Vol.19, No.7, pp.1717–1729, 1971.

[31] C-W. Lin and C.L. Moodie : Hierarchical production planning for a modern steel manufacturing system. *International J. of Production Research* Vol.27, No.4, pp.613–628, 1989.

[32] D. Macko and Y.Y. Haimes : Overlapping coordination of hierarchical structures. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* Vol.SMC-8, No.10, pp.745–751, 1978.

[33] B.R. Meijiboom : *Planning in Decentralized Firms: Contribution to the theory on multilevel decisions.* Springer-Verlag, 1987.

[34] S.R. Mendu, D. Macko, and Y.Y. Haimes : Computational aspects of overlapping coordination methodology for linear hierarchical systems. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* Vol.SMC-10, No.2, pp.68–78, 1980.

[35] H. Nagasawa : *Determination of Planning Horizon in Aggregate Prodution Planning.* 博士論文, 京都大学, 1984.

[36] M. Parlar : Game theoretic analysis of the substitutable product inventory problem with random demands. *Naval Research Logistics* Vol.35, No.3, pp.397–409, 1988.

[37] L.R. Ritzman, L.J. Krajewski, W.L. Berry, S.H. Goodman, S.T. Hardy, and L.D. Vitt, editors : *Disaggregation: problems in manufacturing and service organization.* Nijhoff Pub., 1979.

[38] T.W. Ruefli : Behavioral externalities in decentralized organizations. *Management Science* Vol.17, No.11, pp.B649–B657, 1971.

[39] T.W. Ruefli : A generalized goal decomposition model. *Management Science* Vol.17, No.8, pp.B505–B518, 1971.

[40] G.H. Saad : Hierarchical production-planning systems: extensions and modifications. *J. of Operational Research* Vol.41, No.7, pp.609–624, 1990.

[41] T. Shima and Y.Y. Haimes : The convergence properties of hierarchical overlapping coordination. *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics* Vol.SMC-14, No.1, pp.74–87, 1984.

[42] H. Tubone, H. Matsuura, and T. Tsutsu : Hierarchical production planning system for a two-stage process. *International J. of Production Research* Vol.29, No.4, pp.769–785, 1991.

[43] H. von Stackelberg : *The Theory of the Market Economy.* William Hodge and Company, 1952.

[44] M. Weitzman : Iterative multilevel planning with production targets. *Econometrica* Vol.38, No.1, pp.50–65, 1970.

[45] D.T. Whitford and W.J. Davis : A generalized hierarchical model of resource allocation. *OMEGA* Vol.11, No.3, pp.279–291, 1983.

第5章　結　論

Ho らは [6] において大規模階層システムの新たな展開として，異なる情報を持つ複数の意思決定者が存在するシステムや，多目的計画法を融合させた大規模システム，上位レベルによる調整を必要としない非階層システム，チームの理論からの展開を示唆している．分権的システムに関する研究は，経営学における分権的管理と分割原理の類似性に着目して発展してきた分野であるが，数理的手法に重点を置くあまり本来の分権的システムに関する議論を置き去りにされている傾向がある．[6] における Ho らの示唆は，このような傾向に注意を喚起するものといえる．Ho らが示した展開の方向にある研究として熱力学的システム論に基づいた [1, 3] が報告されており，多目的計画法を融合させた [5]，チームの理論からのアプローチである [7, 8]，非階層組織を対象にした [9] などがある．

本研究は Ho らの示唆を待つまでもなく，分権的に組織化された生産システムの最適化解析に対する分割原理の限界を認識して研究を始めたものである．本研究は，異なる情報を持つ意思決定者が複数存在する階層システムを対象としており，特にミクロ・モデルの多段階生産システムは，工程間の相互関係の調整に上位レベルである管理部門を必要としない非階層システムであるといえる．本研究で行ったことを各章ごとに要約すると，以下のようである．

第 2 章では，分権的システムに対する従来からのアプローチである分割原理の代表的な 4 種類の統合方策を概括し，その妥当性を検討して問題点を指摘した．さらに組織構造に基づいた目標計画法による方法を概括し，その解釈上の問題点を指摘した．これらの問題点を考慮して，分権的に組織化された生産システムの構造を一般的な表現で定式化するこ

とによって明確にし，それをマクロ・モデルとミクロ・モデルに分けて考えることの妥当性を示した．

第３章では，分権的生産システムのマクロ・モデルを資源配分問題として捉え，これにマルチパラメトリック線形計画法を適用することによって，従来の方法では解くことが困難であるとされていた資源配分問題を容易に解くことができることを示した．システム全体の最適化を行なう際に，配分される資源に関する双対変数がシステム全体に関する目的関数の劣勾配であることを明らかにし，それに基づく解法を示した．このマクロ・モデルを２次計画問題の場合と，工場間に技術的相互関係が存在する場合に拡張した．

第４章では，分権的生産システムのミクロモデルに対して，生産目標設定方式による統合法を提案した．下位レベルである多段階生産工程では，工程間の相互関係の調整は工程相互の情報交換によって行い，上位レベルである管理部門による調整を必要としないことを明らかにした．これを行なうために，非協力ゲームの理論における Nash 均衡解の概念が適用できることを明らかにし，最適な均衡解を得るための方法を提案した．提案した生産目標設定方式による統合には生産目標を統合変数とした Stackelberg-Nash 均衡解の概念が適用できることを明らかにし，最適解を得るための方法を示した．

このように，本研究では下位レベルである工場と工程が自律的であり，工程間に協調関係が存在する分権的生産システムの理論展開を行った．残された問題は，第１に第１章で述べた最適分権化の問題がある．これには，第１章で述べた分権度は何かという問題とともに，生産システムをとりまく環境が変化したとき，生産システムをいかに組織化するかという問題がある．環境の変化に適応するこのような生産システムを人見は

「適応的生産管理システム」と呼んでいる [2]．組織化の問題を数理的に取り扱うためには，工場間，あるいは工程間の相互関係を表す制約条件の構造を環境の変化に従って変化させる必要がある．これを行うには，制約条件式の係数をパラメータとして取り扱えばよい．しかしながら，現在のパラメトリック法は，係数行列の１つの列，あるいは１つの行にのみパラメータが存在する場合の解法が提案されているが，それ以上のパラメータが存在する場合の解法はまだ提案されていない．この組織化の問題は，生産システムの進化（あるいは成長）の問題として捉えることができ，分岐過程 (bifurcation) とも関連しており，分権度の定量的な指標を与えるかも知れない．

第２に，下位レベルの意思決定者は上位レベルの意思決定者に対して忠実であるか，という問題がある．下位レベルの意思決定者は，自らの生産を”楽に”計画，あるいは実施できるようにより多くの資源を得ようとして，上位レベルに対して”虚偽”の報告をするかも知れない．このような問題は「公共施設のただ乗りの問題」として知られている [4]．

次に，第３章で非線形計画モデルへの足がかりとして，工場の生産計画問題を２次計画モデルへ拡張したが，これを一般的な非線形計画モデルへ拡張する問題が残されている．特に制約条件式右辺に存在するベクトル・パラメータ項が非線形式で表されるとき，工場の目的関数と計画実施領域が陽的に記述することができるかどうかは，未知の問題である．また本研究では，決定変数を連続変数として取り扱ってきたが，これが離散変数である場合には，工場の生産計画問題を効率よく解くことができるかという問題もある．

第４章では，工程の生産計画問題は２次関数の目的関数を線形関数の制約条件式のもとで最適にする問題を対象にしたが，このような問題以

外の問題では解は集合で得られることが知られている．このように集合で得られた解の中からどの解を選ぶのか，解を選ぶ基準は何かという問題も残された問題である．また管理部門が工程に対して生産目標を設定するとき，本研究では製品の需要量をもとに設定しているが，システム全体の最適化を達成するための生産目標は何かという問題もある．

第3章のマクロ・モデルでは，本部の目的関数は工場の目的関数の関数，すなわち $Z = Z(z_1, \cdots, z_N)$ であった．第4章のミクロ・モデルでは，管理部門の目的関数は工程の目的関数とは独立であった．このように本研究では，上位レベルの目的関数が下位レベルの目的関数で構成される場合と，構成されない場合を取り扱った．残された問題の1つに，上位レベルの目的関数が下位レベルの目的関数で構成されない場合がある．事業部制組織の場合，事業部の利益計画を集約して本部の利益計画が作成されるのであるが，事業部の権限が強く”民主的”であれば，このような本部の利益計画を作成することが可能であるかどうかが問題となる．

参考文献

[1] 深尾毅：分散システム論：熱力学的システム論．昭晃堂，1987．

[2] 人見勝人：生産管理システムの展開．山本純一（編集），経営システムの研究，pp.193–215，日本事務能率協会，1964．

[3] P. Auger : *Dynamics and Thermodynamics in Hierarchically Organized Systems.* Pergamon Press, 1989.

[4] J. Grenn and J. Laffont : *Incentives in Public Decision-Making.* North-Holland, 1979.

[5] Y.Y. Haimes, K. Tarvainen, T. Shima, and J. Thadathil : *Hierarchical Multiobjective Analysis of Large-Scale Systems.* Hemisphere Publishing, 1990.

[6] Y.C. Ho and S.K. Mitter, editors : *Directions in Large-Scale Systems: many-parson optimization and decentralized control.* Plenum Press, 1976.

[7] K.H. Kim and F.W. Roush : *Team Theory.* John Wiley, 1987.

[8] H. Myoken : *Optimal Stabilization Policies of Dynamic Economic Systems under Decentralized Information and Control-Regulation Structures.* Peterlang, 1990.

[9] B. O'Neill : Structures for nonhierarchical organizations. *Behavioral Science* Vol.29, No.1, pp.61–77, 1984.

謝 辞

本研究を遂行するにあたり，終始適切なるご指導とご鞭撻を賜りました京都大学工学部精密工学科人見勝人教授に心から厚くお礼申し上げます．

また，本研究に関しまして多くの有益なご教示やご討論などのご指導を賜りました京都大学工学部精密工学科佐藤進教授，並びに山品元教授に厚くお礼申し上げます．

さらに，本論文を作成するにあたり，種々のご配慮とご鞭撻を頂きました小樽商科大学商学部社会情報学科の方々に深くお礼申し上げます．

かつて大阪大学と京都大学において人見勝人教授のもとで定期的に開催されました研究会に参加されました方々からも，多くの価値あるご助言やご討論を頂きました．ここに，感謝の意を表し，厚くお礼申し上げます．

主な記号一覧

$\boldsymbol{b}_i \in \mathrm{R}^\ell$ ：本部によって工場 i に配分される生産に必要な共通資源の量

$\boldsymbol{b}_0 \in \mathrm{R}^\ell$ ：工場に配分することのできる共通資源の量

ℓ ：共通資源の種類

N ：工場数

n ：工程数

$Z(\boldsymbol{b}_i)$ ：本部の目的関数（評価基準）で，工場利益の総和から資源配分に関する費用を差し引いた利益を採用している．

$z_i(\boldsymbol{X}_i)$ ：工場 i の目的関数（評価基準）で，工場利益を採用している．

$\boldsymbol{X}_i$ ：工場 i の生産計画

$\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{X}_i)$ ：配分される資源に関する制約

$\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{X}_i)$ ：工場独自の制約

$R_i(\boldsymbol{b})$ ：計画実施領域で生産計画 $\boldsymbol{X}_i$ の実施を可能とする資源の配分量の範囲

$\mathcal{P}_i^{(k_i)}$ ：工場 i の第 k_i 番目の生産計画案

$\mathcal{P}_i$ ：工場 i の生産計画案の集合

k_i ：工場 i が本部に報告する生産計画案を示す指標

K_i ：工場 i が本部に報告する生産計画案の数

W ：本部における配分可能な資源に関する制約

R_{Fij_i} ：工程 j_i が達成することのできる生産目標の範囲

$\zeta_{ij_i}(\boldsymbol{X}_{ij_i})$ ：工程 j_i によって作成される生産目標に対する制約

$\boldsymbol{x}_{ij_i}$ ：工場 i における工程 j_i の生産計画

f_{ij_i}　：工場 i における工程 j_iの目的関数

$\boldsymbol{h}_{ij_i}(\boldsymbol{x}_{ij_i})$　：工場 i における工程 j_iの制約

H_{ij_i}　：工場 i における工程 j_iの実行可能領域

η_{ij_i}　：工場 i において，工程 j_iが他の工程と情報交換することによって得ることのできる情報

$\boldsymbol{C} \in \mathrm{R}^{N\ell}$　：資源配分に要する費用

G　：資源配分に関する係数行列

m_i　：工場 i で生産される製品の種類

$\boldsymbol{X}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工場 i が生産する製品の生産量

$\boldsymbol{c}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$　：製品の単位利益

E　：配分される資源に関する $p_{1i} \times \ell$係数行列

F_i　：配分される資源の使用に関する $p_{1i} \times m_i$係数行列

H_i　：工場 i 独自の制約に関する $p_{2i} \times m_i$係数行列

Ω　：本部問題の実行可能領域

ω_ξ　：本部問題で実行可能となる工場問題の計画実施領域

∂Z　：本部の評価関数 Zの劣微分

$\boldsymbol{\rho}$　：劣勾配

$\hat{\boldsymbol{w}}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工場 i の要求量

$\check{\boldsymbol{w}}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工場 i の供給量

H　：管理部門の生産計画期間

h　：管理部門の生産計画期間の各期を表す添字

T　：工程の生産計画期間

t　：工程の生産計画期間の各期を表す添字

$\boldsymbol{x}_i(t) \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工程 i で生産される製品の t 期生産時間

$\boldsymbol{y}_i(t) \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工程 i で生産される製品の t 期首在庫量

$\boldsymbol{d}_i(t) \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工程 i で生産される製品の t 期需要量

$\boldsymbol{X}_i(h) \in \mathrm{R}^{m_i}$　：管理部門が決定する h 期における工程 i に関する製品の目標生産時間

$\boldsymbol{Y}_i(h) \in \mathrm{R}^{m_i}$　：管理部門が決定する h 期における工程 i に関する製品の目標在庫量

$\boldsymbol{c}_{pi} \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工程 i が製品を生産するのに要する単位生産費用

$\boldsymbol{c}_{hi} \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工程 i が製品を保管するのに要する単位在庫費用

$\boldsymbol{\alpha}_i \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工程 i が製品 1 個を生産するのに必要とする資源の量

$\boldsymbol{p}_i \in \mathrm{R}^{m_i \times m_i}$　：工程 i が生産する製品の単位時間当りの生産個数（生産率）

B_{ij}^{l}　：工程 i の後続工程 jで生産する製品 1 個に要する工程 i で生産する製品の数で $m_i \times m_j$行列

$\boldsymbol{x}_i^*(t) \in \mathrm{R}^{m_i}$　：工程間の相互関係を満たす t 期における工程 i の Nash 均衡解

発表論文一覧

[1] 奥田和重，人見勝人：資源配分型２階層分権的システムの解析，日本経営工学会誌，Vol.32，No.5，(1981)，pp.365-371

[2] 奥田和重，人見勝人：資源配分型２階層分権的システムの解析—技術的相互関係が存在する場合—，日本経営工学会誌，Vol.34，No.4，(1983)，pp.257-263

[3] 奥田和重：分権的システムにおける資源配分による統合問題の解析，システムと制御，Vol.29，No.9，(1985)，pp.601-608

[4] 奥田和重：大規模システムの資源配分型統合法について，商学討究，Vol.35，No.2-3，(1985)，pp.165-186

[5] 奥田和重：分権的システム—分割原理と非協力ゲームによるアプローチ，商学討究，Vol.38，No.2，(1987)，pp.53-76

[6] K.Okuda: Studies of Coordination Problem in Decentralized Production Systems, *Proceedings of International Conference on Economics / Management and Information Technology 92*, (1992), pp.181-184